Теоретический минимум по №18

Содержание

1 Основная теорема арифметики, НОД и НОК

1.1 Необходимые определения и ОТА

Определение Натуральное число p является *простым*, если оно имеет ровно два различных делителя: 1 и p.

NB Заметим, из данного определения следует, что число 1 **не является** простым. К тому же число 2 является **единственным четным простым** числом.

Определение *Наибольшим общим делителем* (НОД) двух чисел m и n называется наибольшее натуральное число, на которое делятся и m, и n. Допустимые обозначения: НОД(m, n); (m, n).

Аналогом слова "делится" является значок $\vdots$, то есть запись $a \,\vdots\, b$ означает, что a делится на b. Например, из определения выше очевидно, что $m \,\vdots\, (m, n)$ и $n \,\vdots\, (m, n)$.

Определение *Наименьшим общим кратным* (НОК) двух чисел m и n называется наименьшее натуральное число, которое делится и на m, и n. Допустимые обозначения: НОК(m, n); $[m, n]$.

Иными словами НОК — это наименьшее натуральное k такое, что $k \,\vdots\, m$ и $k \,\vdots\, n$.

Теорема *(Основная теорема арифметики или ОТА)*

Любое натуральное число $n > 1$ единственным образом представимо в виде

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k}, \text{ где } p_1 < p_2 < \ldots < p_k \text{ — простые числа, } \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_k \text{ — натуральные.}$$

Менее формально можно сказать, что по ОТА любое натуральное число, кроме 1, раскладывается на простые множители единственным образом.

NB Разложение числа по ОТА, записанное выше, также называют *каноническим*.

Определение Два числа a и b называются *взаимно простыми*, если в их разложениях нет ни одного общего простого множителя.

Очевидно, что данное определение взаимно простых эквивалентно следующему:

Определение Два числа a и b называются *взаимно простыми*, если их НОД равен 1.

1.2 Задачи на ОТА

1. Существует ли натуральное число с произведением цифр 2310?

Ответ

Не существует

Решение

Разложим число 2310 на простые множители, получим $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.

Допустим, что существует некоторое простое число, произведение цифр которого равно 2310, тогда, как видно по разложению на простые множители, произведение цифр должно делиться на 11. Однако ни одна ненулевая цифра не делится на 11, значит, такое невозможно.

NB Заметим, что нам было важно, что 11 является простым и не может быть разложено на более мелкие множители $\Rightarrow$ одна из цифр должна быть кратна 11, что приведит к противоречию.

2. Сколько существует пар простых чисел, которые отличаются друг от друга на 15?

Ответ

Единственная пара 2 и 17

Решение

Уже было замечено, что 2 — единственное четное простое число. Воспользуемся этим.

Пусть мы имеем $p_1 + 15 = p_2$. Допустим, p_1 нечетно, тогда левая часть равенства четна $\Rightarrow$ p_2 — некоторое четное простое, большее 15. Получаем противоречие. Остается случай, когда p_1 четно, то есть фактически равно 2. Получаем пару 2 и 17.

3. Разделите числа 2, 4, 6, 10, 22, 25, 40, 66 на две группы так, чтобы произведения в двух группах были равны. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ

Единственный допустимый способ:

$\mathrm{I} : 22 \cdot 6 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 4$

$\mathrm{II} : 66 \cdot 10 \cdot 40$

Решение

Разложим каждое из чисел на простые множители:

$$2 = 2$$
$$4 = 2^2$$
$$6 = 2 \cdot 3$$
$$10 = 2 \cdot 5$$
$$22 = 2 \cdot 11$$
$$25 = 5^2$$
$$40 = 2^3 \cdot 5$$
$$66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$$

Заметим, что равенство произведений чисел в группах равносильно тому, что равны наборы простых множителей в них одинаковые. Будем постепенно формировать группы.

Числа 22 и 66 — единственные, содержащие в разложении множитель 11 $\Rightarrow$ они должны быть помещены в разные группы. Для удобства назовем I группу с числом 22 и II группу с числом 66.

$$\mathrm{I} : 2 \cdot 11$$
$$\mathrm{II} : 2 \cdot 3 \cdot 11$$

Заметим, что из оставшихся чисел только 6 содержит в разложении 3, причем группа II уже содержит 3, а I не содержит. Значит, число 6 должно оказаться в I группе.

$$\mathrm{I} : (2 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 3)$$
$$\mathrm{II} : 2 \cdot 3 \cdot 11$$

Посмотрим на множитель 5. 10 и 40 содержат его в первой степени, 25 — во второй $\Rightarrow$ в одной из групп должно оказаться число 25, а в другой — пара чисел 10 и 40. Чтобы понять, что в какой группе, рассмотрим простой множитель 2. Во все числа в совокупности 2 входит в 10 степени, значит, итоговая степень 2 в каждой из групп должны быть равна 5. Пара 10 и 40 содержит 2 в 4 степени, если мы поместим ее в первую группу, степень двойки в ней составит уже 2+4=6, т.е. превысит 5. Остается единственный допустимый способ расположения по группам чисел, кратных 5.

$$\mathrm{I} : (2 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (5^2)$$
$$\mathrm{II} : (2 \cdot 3 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2^3 \cdot 5)$$

Остались числа 2 и 4, их располагаем единственным подходящим способом в группу I, получаем итоговое разбиение. Заметим, что нигде не было альтернатив, мы просто "восстанавливали"ситуацию, т.е. способ является единственным по построению.

$$\mathrm{I} : (2 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (5^2) \cdot 2 \cdot (2^2) = 22 \cdot 6 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 4$$
$$\mathrm{II} : (2 \cdot 3 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2^3 \cdot 5) = 66 \cdot 10 \cdot 40$$

4. Прямоугольник с целыми длинами сторон разбит на двенадцать квадратов со следующими длинами сторон: 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 9, 9. Каков периметр прямоугольника?

Ответ

90

Решение

Найдем площадь S прямоугольника, она равна сумме площадей квадратов, на которые он разбит

$$S = 2 \cdot (2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2) = 2 \cdot (4 + 9 + 25 + 49 + 64 + 81) = 464$$

Разложим на простые, получим $464 = 2^4 \cdot 29$. Площадь равна произведению сторон, рассмотрим все возможные способы представления числа 464 в виде произведения двух множителей, пользуясь его разложением: $1 \cdot 464$; $2 \cdot 232$; $4 \cdot 116$; $8 \cdot 58$; $16 \cdot 29$. Заметим, что в каждом представлении, кроме последнего, один из множителей меньше 9, т.е. одна из сторон такого прямоугольника меньше 9. Это противоречит тому, что такой прямоугольник в своем разбиении содержит квадрат со стороной 9, значит, единственный возможный вариант достигается при длинах сторон 16 и 29. Периметр в таком случае равен 90.

1.3 Важные факты про НОК и НОД

Факт 1 a и b — натуральные числа. Их НОД обозначим (a, b), НОК обозначим $[a, b]$. Тогда выполняется соотношение

$$a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b],$$

то есть произведение НОК и НОД равно произведению чисел.

Доказательство

Возьмем произвольное простое число p и докажем, что оно содержится в разложениях на простые левой и правой частей в одинаковой степени. Из этого будет сразу следовать равенство.

Пусть степень вхождения p в разложение на простые множители числа a равна α, в разложение b — β (α и β могут быть равны нулю). Тогда степень вхождения p в левую часть равна $\alpha + \beta$.

Степень вхождения p в (a, b) равна $\min(\alpha, \beta)$. Действительно, больше она быть не может, т.к. в этом случае одно из чисел не будет делиться на НОД, что противоречит определению, меньше она быть не может, т.к. возникает противоречие с максимальностью НОД. По аналогичным соображениям степень вхождения p в $[a, b]$ равна $\max(\alpha, \beta)$.

Итого имеем, что в левую часть p входит в степени $\alpha + \beta$, а в правую в степени $\min(\alpha, \beta) + \max(\alpha, \beta)$, но очевидно, что $\alpha + \beta = \min(\alpha, \beta) + \max(\alpha, \beta)$ для любых $\alpha,\ \beta$. Следовательно для любого простого p верно, что оно входит в разложения обеих частей в равной степени, значит, равенство выполняется.

Факт 2 a и b — натуральные числа, их НОД равен d. Тогда

$$\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1,$$

то есть такие числа взаимно просты.

Доказательство

Допустим противное, пусть $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$ делится на некоторое простое p. Тогда $\frac{a}{d} \vdots p$ и $\frac{b}{d} \vdots p$. Положим $d_1 = p \cdot d$. Тогда $a \vdots d_1,\ b \vdots d_1,\ d_1 > d$, получили противоречие с тем, что d — НОД a и b.

1.4 Формула для количества делителей числа

Лемма Пусть натуральное число n имеет канонический вид

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k},\ \text{где } p_1 < p_2 < \ldots < p_k \text{ — простые числа, } \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_k \text{ — натуральные.}$$

Тогда общее количество D_n различных делителей числа n выражается формулой

$$D_n = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k + 1)$$

Доказательство

Определим произвольный делитель d числа n как некоторое число, в разложение которого каждый простой множитель входит в степени не большей, чем степень вхождения этого простого множителя в разложение числа n. Это можно записать так

$$d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots p_k^{\beta_k},\ \text{где } 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1, 0 \leqslant \beta_2 \leqslant \alpha_2, \ldots, 0 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$$

Таким образом, набор соответствующих β единственным образом задает делитель. Посчитаем количество таких наборов. Есть $\alpha_i + 1$ способов выбрать b_i из набора $0, 1, \ldots, \alpha_i$, каждое b_i выбирается независимо, перемножив, получаем нужную формулу.

1.5 Определения НОК и НОД для произвольного количества чисел

Определение *Наибольшим общим делителем* для набора из n чисел называется наибольшее натуральное число, на которое делится каждое число из набора.

Определение *Наименьшим общим кратным* для набора из n чисел называется наименьшее натуральное число, которое делится на каждое число из набора.

Задание формата ЕГЭ

а) Приведите пример 5 различных натуральных чисел, расставленных по кругу так, что наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел равно 105.

б) Можно ли расставить по кругу 8 различных натуральных чисел так, чтобы наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел равнялось 300, а наибольший общий делитель любых трех подряд идущих чисел равнялся 1?

в) Какое наибольшее количество различных чисел можно расставить по кругу так, чтобы наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел было равно 60?

Ответ

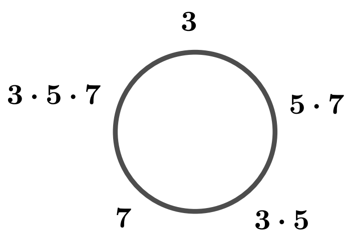
а) 3, 35, 15, 7, 105

б) Нет

в) 8

Решение

а) Разложим 105 на простые множители: $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Зная разложение, несложно подобрать нужные 5 чисел, например



б) Допустим, это возможно.

Возьмем произвольные соседние числа a и b, тогда $[a, b] = 300$. По определению $[a, b] \vdots a \Rightarrow 300 \vdots a$, аналогично для b. Значит, каждое число в кругу является делителем числа 300.

Разложим 300 на простые множители, получим $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Попробуем выделить среди делителей числа 300 те, которые точно не могут быть использованы.

Сразу можем исключить 1, т.к. с обеих сторон от нее может стоять число 300, чтобы не нарушать условие про НОК соседей. Однако числа не могут повторяться.

Далее, рассмотрим делители 300, которые содержат 2 ровно в первой степени. Допустим, некоторое число $2t$, где t нечетно, стоит в кругу. Рассмотрим соседа s числа $2t$. По условию $[s, 2t] = 300 \vdots 4$, причем $2t$ не делится на $4 \Rightarrow s \vdots 4$. Аналогично и второй сосед r числа $2t$ также делится на 4. По условию должно выполняться $(s, 2t, r) = 1$, однако $s \vdots 4$, $2t \vdots 2$, $r \vdots 4$, т.е. их НОД должен быть четным. Получаем противоречие, значит, ни один из делителей числа 300 вида $2t$, где t нечетно, не мог быть использован.

Выпишем все оставшиеся делители, их 11

$$3,\ \underline{5},\ 2^2,\ 5^2,\ \underline{3\cdot 5},\ 2^2\cdot 3,\ \underline{2^2\cdot 5},\ 3\cdot 5^2,\ 2^2\cdot 5^2,\ \underline{2^2\cdot 3\cdot 5},\ 2^2\cdot 3\cdot 5^2$$

Выделены те делители, которые содержат 5 ровно в первой степени. Их мы можем исключить по соображениям, аналогичным приведенным выше. Заметим, что нам было совершенно несущественно, что именно 2 входит в первой степени, и при замене 2 на произвольное простое число ничего не изменится. Итого, неисключенными остались $11 - 4 = 7$ чисел, а по кругу должны быть расставлены 8. Противоречие.

в) Допустим, мы имеем корректную расстановку на некоторое количество чисел. Возьмем произвольные соседние числа a и b, тогда $[a, b] = 60$. По определению $[a, b] \vdots a \Rightarrow 60 \vdots a$, аналогично для b. Значит, каждое число в кругу является делителем числа 60.

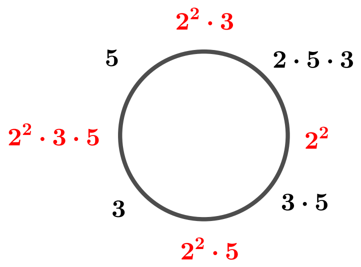
Разложим 60 на простые множители, получим $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Выпишем все его делители

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 2^2,\ 2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ 3\cdot 5,\ 2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5,\ 2\cdot 3\cdot 5,\ 2^2\cdot 3\cdot 5$$

Получили 12 различных делителей. Проверить себя можно, посчитав количество делителей по формуле: $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

В каждой паре соседей НОК должен быть равен 60, а значит, кратен 4 $\Rightarrow$ в каждой паре соседних хотя бы одно из чисел должно быть кратно 4 $\Rightarrow$ не должно быть такого, что два числа подряд по кругу не делятся на 4. Получили, что хотя бы половина чисел в кругу кратна 4. Всего в нашем списке 4 числа, кратных 4 $\Rightarrow$ общее количество чисел в кругу не превосходит 8.

Построим пример на 8 (красным для удобства восприятия обозначены числа, кратные 4).



2 Сравнения по модулю

2.1 Важнейшие свойства сравнений

Определение Целые числа a и b, разность которых делится на натуральное число m, называют *сравнимыми по модулю* m. Записывают так: $a \equiv b \pmod{m}$.

NB Для неотрицательных чисел определение можно интерпретировать так, что a и b дают равные остатки при делении на m.

Свойства сравнений

Везде ниже все числа целые, модуль m — натуральный.

- Сравнения можно умножать на число

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ak \equiv bk \pmod{m}$$

- Сравнения можно складывать

$$\left.\begin{aligned} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a + b \equiv c + d \pmod{m}$$

- Сравнения можно перемножать

$$\left.\begin{aligned} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow ab \equiv cd \pmod{m}$$

- Сравнения можно возводить в степень

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{m}$$

2.2 А зачем нам вообще это нужно?

Фактически вышеперечисленные свойства позволяют нам удобнее работать с остатками и делимостью. К примеру, раньше, если нам нужно было вычислить остаток, который дает какое-то сложное выражения (содержащее операции умножения, сложения, вычитания и возведения в степень, скобки, все это в произвольном порядке) при делении на некоторое число, мы бы стали вычислять значение этого выражения и лишь в конце искать остаток результата. Теперь же мы можем заменить все числа на их остатки, что может существенно упростить вычисления, а также заменять результат на его остаток по ходу вычисления. Следующая задача иллюстрирует, что здесь имеется в виду.

1. Докажите, что число $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24$ делится на 999.

Решение

По сути, нам нужно доказать, что

$$1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24 \equiv 0 \pmod{999}$$

Мы можем заменить любое число на сравнимое с ним по модулю 999, значит,

$$1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24 \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 24 \equiv 0 \pmod{999}$$

2.3 Остатки отрицательных чисел

Остановимся чуть подробнее на остатках отрицательных чисел, потому что иногда на первый взгляд то, как они устроены, может показаться неинтуитивным.

Определение Определим *остаток* числа a по модулю m как наименьшее целое неотрицательное число, которое нужно **вычесть** из a, чтобы разность делилась на m.

Можно заметить связь этого определения с определением сравнимых по модулю чисел. По данному только что определению -7 дает остаток 3 по модулю 10 (т.к. из -7 нужно вычесть минимум 3, чтобы разность делилась на 10), -99 дает остаток 1 по модулю 100, а -1 дает остаток $m-1$ по любому модулю m.

5. На какую цифру оканчивается число $9^{2015} + 7^{2016}$?

Решение
Нам нужно найти, с чем сравнима данная сумма по модулю 10.

$$9 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow 9^{2015} \equiv (-1)^{2015} \equiv -1 \pmod{10}$$
$$7 \equiv -3 \pmod{10} \Rightarrow 7^{2016} \equiv (-3)^{2016} \equiv 9^{1008} \equiv (-1)^{1008} \equiv 1 \pmod{10}$$

Получили что сумма сравнима с $-1+1=0$ по модулю 10, а значит, оканчивается нулем. Если какие-то сравнения в цепочках не до конца понятны, рекомендуется обратиться к основным свойствам и проверить по определению.

3 Десятичная запись числа и признаки равноостаточности

3.1 Представление числа в виде десятичной записи

Очень часто в задачах на теорию чисел приходится работать с одной или несколькими цифрами числа. В подобных ситуациях удобно представлять m-значное число n в следующем виде

$$n = \overline{a_{m-1} \dots a_1 a_0} = a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

Таким образом, a_0 обозначает количество единиц числа n, a_1 — количество десятков числа n, a_2 — количество сотен и так далее. Например, четырехзначное число можно обозначить через $\overline{abcd}$.

3.2 Признаки равноостаточности по модулям 9 и 3

Лемма Любое натуральное число сравнимо со своей суммой цифр по модулю 9.

Доказательство
Представим число в виде его десятичной записи $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$. Хотим доказать, что

$$\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0} \equiv a_k + a_{k-1} + \dots + a_0 \pmod{9}$$

Распишем

$$\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_0 \cdot 10^0$$

Несложно понять, что для любого целого неотрицательного $i : 10^i \equiv 1 \pmod 9$. Это следует, например, из свойства сравнений про возведение в степень. Тогда

$$a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_0 \cdot 10^0 \equiv a_k \cdot 1 + a_{k-1} \cdot 1 + \dots + a_0 \cdot 1 \equiv a_k + a_{k-1} + \dots + a_0 \pmod 9$$

Лемма Любое натуральное число сравнимо со своей суммой цифр по модулю 3.

Доказательство
Аналогично предыдущей лемме.

3.3 Признаки равноостаточности по модулям 8 и 4

Лемма Любое натуральное число сравнимо с числом, образованным его последними тремя цифрами, по модулю 8.

Доказательство
Представим число в виде его десятичной записи $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$. Хотим доказать, что

$$\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0} \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} \pmod 8$$

Это равносильно следующему

$$\overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0} - \overline{a_2 a_1 a_0} \equiv 0 \pmod 8 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a_k a_{k-1} \dots a_3 000} \equiv 0 \pmod 8$$

Последнее сравнение верно, так как любое число с тремя нулями на конце делится на 1000, а значит, и на 8.

Лемма Любое натуральное число сравнимо с числом, образованным его последними двумя цифрами, по модулю 4.

Доказательство
Аналогично предыдущей лемме.

3.4 Признак делимости на 11

Лемма Число делится на 11 тогда и только тогда, когда модуль разности между суммой цифр, занимающих нечётные позиции, и суммой цифр, занимающих чётные позиции, делится на 11.

Например, число 9 163 627 делится на 11, так как $|(9 + 6 + 6 + 7) - (1 + 3 + 2)| = 22$ делится на 11.

4 Среднее арифметическое

Определение *Средним арифметическим* n чисел является отношение суммы S этих чисел к их количеству.

$$m = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{S}{n}$$

Во многих задачах намного удобнее работать с суммами чисел, чем со средними арифметическими. Выразив сумму из формулы выше, получим

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n = mn,$$

то есть суммы чисел равна произведению их количества и среднего арифметического.

Факт 1 Любой член произвольной арифметической прогрессии равен среднему арифметическому соседних членов.

Доказательство
Пусть b разность прогрессии, тогда

$$a_{k-1} = a_k - b, \quad a_{k+1} = a_k + b \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} = \frac{(a_k - b) + (a_k + b)}{2} = a_k$$

Факт 2 Пусть имеется набор из n чисел со средним арифметическим, равным m. Тогда после добавления в набор числа, **меньшего**, чем m, среднее арифметическое чисел набора **уменьшится**.

Доказательство
Обозначим добавленное число через a. Сумма чисел исходного набора равна mn, тогда сумма чисел набора после добавления равна $mn + a$. Нужно доказать, что неравенство

$$m > \frac{mn + a}{n + 1}$$

выполняется для любого $a < m$. Равносильными переходами получаем

$$m(n + 1) > mn + a \quad \Leftrightarrow \quad m > a,$$

что является верным неравенством.

Факт 2 Пусть имеется набор из n чисел со средним арифметическим, равным m. Тогда после добавления в набор числа, **большего**, чем m, среднее арифметическое чисел набора **увеличится**.

Доказательство
Аналогично предыдущему.

5 Минимальная сумма

Задание 18 (*ЕГЭ, 2017*)
На доске написано 100 различных натуральных чисел, причем известно, что сумма этих чисел равна 5120.
а) Может ли оказаться, что на доске написано число 230?
б) Может ли оказаться, что на доске нет числа 14?
в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 14, может быть на доске?

Ответ

а) Нет, не может

б) Нет, не может

в) 3

Решение

Известно, что сумма первых n последовательных натуральных чисел $1+2+\ldots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

а) Рассмотрим наименьшую возможную сумму S, содержащую число 230. Она состоит из наименьших 99 натуральных чисел и числа 230. $S = \frac{99\cdot 100}{2} + 230 = 5180 > 5130 \Rightarrow$ получаем противоречие.

б) Допустим, число 14 не написано на доске, возьмём 100 минимальных натуральных чисел, которые еще доступны. Их сумма равна $S = \frac{101\cdot 102}{2} - 14 = 5137$. Очевидно, что какие бы числа ни были написаны на доске, их сумма будет не меньше S. Но $S > 5130 \Rightarrow$ получаем противоречие.

в) В пункте б) мы доказали, что как минимум одно число, кратное 14, написано на доске. Допустим, на доске оказалось написано ровно два числа a и b, кратных 14. Тогда сумма на доске не меньше, чем $S+a+b$, где S — наименьшая возможная сумма 98 различных натуральных чисел, ни одно из которых не кратно 14. Фактически она равна сумме наименьших 98 различных натуральных чисел, не кратных 14. Ее легко посчитать (семь наименьших чисел, кратных 14, это 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98)

$$S = \frac{105\cdot 106}{2} - (14+28+42+56+70+84+98) = 5173 > 5120 \Rightarrow S+a+b > 5120$$

Получаем противоречие.

Допустим, на доске оказалось написано ровно три числа a, b и c, кратных 14. Тогда сумма на доске не меньше, чем $S+a+b+c$, где S — наименьшая возможная сумма 97 различных натуральных чисел, ни одно из которых не кратно 14. Фактически она равна сумме наименьших 97 различных натуральных чисел, не кратных 14. Ее легко посчитать (семь наименьших чисел, кратных 14, это 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98)

$$S = \frac{104\cdot 105}{2} - (14+28+42+56+70+84+98) = 5068$$

Это на 52 меньше, чем сумма в условии, но $a+b+c \geqslant 14+28+42 = 84$. Снова получаем, что $S+a+b+c > 5120$. Таким образом мы доказали, что чисел, кратных 14, должно быть хотя бы 4.

Приведём пример, когда на доске написано четыре числа, кратных 14 (14, 28, 42 и 56):
$1, 2, \ldots, 69, 71, \ldots, 83, 85, \ldots, 97, 99, 100, 101, 102, 119$. Их сумма равна

$$\frac{102\cdot 103}{2} - (70+84+98) + 119 = 5120$$