

Информатика. Нахождение самого выгодного пути.

18 задание ЕГЭ по информатике.

Это задание отлично показывает метод обратной индукции.

Для успешного выполнения данного задания нужно обладать лишь базовыми навыками работы в Excel.

Формулировка 18 задания по информатике:

1) Квадрат разлинован на $N \times N$ клеток ($1 < N < 17$). Исполнитель Робот может перемещаться по клеткам, выполняя за одно перемещение одну из двух команд: вправо или вниз. По команде вправо Робот перемещается в соседнюю правую клетку, по команде вниз — в соседнюю нижнюю. При попытке выхода за границу квадрата Робот разрушается. Перед каждым запуском Робота в каждой клетке квадрата лежит монета достоинством от 1 до 100. Посетив клетку, Робот забирает монету с собой; это также относится к начальной и конечной клетке маршрута Робота.

Откройте файл. Определите *<макс./мин.>* денежную сумму, которую может собрать Робот, пройдя из *<начальная клетка>* в *<конечная клетка>*. В ответ запишите *<искомое число>* .

Исходные данные представляют собой электронную таблицу размером $N \times N$, каждая ячейка которой соответствует клетке квадрата.

Пример входных данных:

1	4	12	2
8	1	12	6
12	5	3	3
2	3	5	8

Для указанных входных данных ответом должно быть *<ответ для вышеуказанных входных данных>* .

P.S: Вместо команд "вправо" и "вниз" могут быть другие команды, например, "влево" и "вниз" - не стоит это упускать из внимания, от изменения этих условий может измениться ответ.

В чем заключается метод обратной индукции? Это процесс рассуждений от конца. В нашем случае, это обдумывание пути не с начальной клетки, а с конечной. Рассмотрим поподробнее уже на примере:

Пример 1:

Робот может перемещаться в соседнюю правую или в соседнюю левую клетку за один ход. Определите максимальную денежную сумму, которую может собрать Робот, пройдя из верхней левой клетки в правую нижнюю клетку.

Входные данные:

10	20	15	21
30	40	13	14
60	70	11	12
7	8	9	10

Рассуждение:

Если рассуждать о всевозможных путях из начальной клетки, то у нас получается слишком много разветвлений путей, это довольно неудобно, поэтому мы пойдем от обратного. Для удобства обозначим столбцы и строки как в Excel:

	A	B	C	D
1	10	20	15	21
2	30	40	13	14
3	60	70	11	12
4	7	8	9	10

Мы точно знаем конечную позицию, в которой мы должны оказаться - это $D4$ (правая нижняя клетка). В нее можно попасть только из $D3$ (соседняя верхняя) и $C4$ (соседняя левая) клеток. Представим, что у Робота уже дошел до $D3$ или $C4$ (рассматриваем одновременно два варианта пути: через $D3$ и $C4$). А из какой нам лучше попадать в $D4$? Конечно, из той, пройдя через которую мы будем иметь больше монет, ведь мы хотим взять максимально возможную денежную сумму. А в какой из клеток $D3$ и $C4$ будет больше монет? Заметим, что сейчас разговор идет не про монеты, которые изначально расположены по клеткам, а про монеты, которые уже будут у нас в карманах, когда мы дойдем до самой клетки. Так вот, если мы узнаем максимальную денежную сумму, которую может получить Робот дойдя до $D3$ и $C4$, тогда-то мы и поймем, из какой лучше шагнуть в $D4$ (в нашем случае из той, дойдя до которой мы подняли большее количество монет).

Таким образом мы разделили нашу большую задачу (поиска самого "дорогого" пути в $D4$) на две задачи поменьше (поиска самого "дорогого" пути в $D3$ и $C4$). А теперь применим подобные размышления для клеток $D3$ и $C4$. То есть $D3$ опять разделится на "подзадачи" для клеток $D2$ или $C3$, а $C4$ разделится на "подзадачи" для клеток $C3$ или $E4$.

Так по идее становится понятно, что если все зависит от соседних верхних и соседних левых клеток, то рано или поздно все маленькие задачи, на которые мы делим большие задачи, сведутся к клетке $A1$.

Теперь попробуем заполнить нашу таблицу исходя из данных первой таблицы. В ней мы будем хранить максимальное количество монет, которые можно получить, дойдя до определенной клетки. Например, сколько максимум монет можно подобрать дойдя до $A1$? Ровно столько, сколько и есть в $A1$, то есть 10 монет, потому что это наша стартовая клетка. А сколько можно максимум поднять монет, дойдя до клетки $A2$?

Ну в $A2$ можно попасть только одним способом: из $A1$, следовательно, раз это единственный путь, то это путь с максимальным "заработком" монет. Так мы получили, что дойдя до клетки $A2$ можно максимум получить $10 + 30 = 40$ монет. Получаем таблицу:

10	0	0	0
40	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Нулем обозначены клетки, у которых мы еще не посчитали максимально возможное количество монет. Теперь для удобства также обозначим столбцы и строки у этой таблицы, но, чтобы не путать ее с исходной таблицей, обозначим номера ее строк так, будто она находится в Excel под нашей исходной таблицей (то есть максимально кол-во монет, которое Робот может "подобрать" по пути в $A2$, будет храниться в ячейке $A7$ - на 5 строк ниже):

	A	B	C	D
6	10	0	0	0
7	40	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0

У клетки $B1$ ситуация подобна $A2$, то есть в $B1$ можно пройти лишь одним путем (из $A1$), а значит он и будет для нас самым выгодным:

	A	B	C	D
6	10	30	0	0
7	40	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0

Аналогично продолжаем рассуждения для клеток снизу от $A2$ (то есть для клеток $A3$ и $A4$), и для клеток справа от $B1$ (то есть для клеток $C1$ и $D1$), получаем уже немало заполненных клеток, между прочим:

	A	B	C	D
6	10	30	45	66
7	40	0	0	0
8	100	0	0	0
9	107	0	0	0

Теперь начинается самое интересное: сколько максимум монет можно получить, дойдя до клетки $B2$? А откуда вообще можно прийти в $B2$? Из $A2$ и $B1$. А из каких клеток мы принесем больше монет? Ну это мы уже знаем - из $A2$ мы принесем больше монет, мы ведь это уже строго посчитали. Значит в $B2$ нам выгодней шагать из $A2$, а значит мы так и поступим. Заполняем $B7$ значением $40 + 40 = 80$ монет. Получаем:

	A	B	C	D
6	10	30	45	66
7	40	80	0	0
8	100	0	0	0
9	107	0	0	0

Чувствуете индукцию? Максимально возможное количество монет, которое Робот сможет "подобрать" по пути до клетки, зависит от такого же максимально возможного кол-ва монет в соседней верхней и соседней левой клетке. Просто "шагаем" из той клетки, в которой это максимальное количество монет больше. По такому же принципу постепенно заполняем оставшиеся клетки нашей таблицы:

	A	B	C	D
6	10	30	45	66
7	40	80	93	107
8	100	170	0	0
9	107	178	0	0

	A	B	C	D
6	10	30	45	66
7	40	80	93	107
8	100	170	181	193
9	107	178	190	0

	A	B	C	D
6	10	30	45	66
7	40	80	93	107
8	100	170	181	193
9	107	178	190	203

Таким образом, получаем, что максимальная денежная сумма, которую Робот может "накопить" по пути в клетку $D4$, составляет 203 монеты. Именно это число и будет ответом.

Реализация решения в Excel:

Как можно было заметить, все только что проделанные нами действия можно прописать в таблицу Excel, которая уже сделает все подсчеты за нас. Выделим главные моменты решения:

- Создание вспомогательной таблицы. Причем значение стартовой клетки во вспомогательной таблице будет равно значению стартовой клетки в исходной таблице, как это было у нас с клеткой $A1$.
- Заполнение значений клеток, к которым можно подобраться лишь одним способом. В нашем случае это был столбец A и строка 1.
- Заполнение оставшихся клеток вспомогательной таблицы способом выбора наивыгодной клетки, из которой можно попасть в текущую. В нашем случае это были клетки $B2$ и другие.

Начнем с первого пункта: перенесем данную нам таблицу в Excel, а вспомогательную таблицу такого же размера расположим под исходной таблицей:

	A	B	C	D
1	10	20	15	21
2	30	40	13	14
3	60	70	11	12
4	7	8	9	10
5				
6				
7				
8				
9				

Теперь сразу во вспомогательной таблице значение начальной клетки (A6) приравняем клетке A1, потому что это начальная клетка в исходной таблице:

	A	B	C	D
1	10	20	15	21
2	30	40	13	14
3	60	70	11	12
4	7	8	9	10
5				
6	=A1			
7				
8				
9				

Замечательно! Теперь можем переходить ко второму пункту: раз в A7 можно перейти лишь из A6, следовательно в A7 нужно записать значение $A6 + A2$, но мы просто запишем это формулой $=A6 + A2$ и растянем ее до клетки A9, чтобы сэкономить себе время и не считать ручками каждую из трех ячеек:

	A	B	C	D
1	10	20	15	21
2	30	40	13	14
3	60	70	11	12
4	7	8	9	10
5				
6	10			
7	=A6+A2			
8				
9				

	A	B	C	D
1	10	20	15	21
2	30	40	13	14
3	60	70	11	12
4	7	8	9	10
5				
6	10			
7	40			
8	100			
9	107			

Теперь подобные действия проделываем с первой строкой:

	A	B	C	D
1	10	20	15	21
2	30	40	13	14
3	60	70	11	12
4	7	8	9	10
5				
6	10	=A6+B1		
7	40			
8	100			
9	107			

	A	B	C	D
1	10	20	15	21
2	30	40	13	14
3	60	70	11	12
4	7	8	9	10
5				
6	10	30	45	66
7	40			
8	100			
9	107			

Отлично! Теперь можем перейти к последнему пункту: так как в $B7$ можно пройти двумя путями: из $A7$ и из $B6$, то нам нужно выбрать максимально выгодный из них, и к его значению добавить значение ячейки $B2$, ведь мы в нее "шагаем," а значит Робот положит себе в карман монеты еще и с этой клетки:

	A	B	C	D
1	10	20	15	21
2	30	40	13	14
3	60	70	11	12
4	7	8	9	10
5				
6	10	30	45	66
7	40	=МАКС(A7;B6) + B2		
8	100			
9	107			

Теперь эту же формулу растягиваем на все оставшиеся не посчитанные клетки, ведь они будут считаться также, как и клетка B7 :

	A	B	C	D
1	10	20	15	21
2	30	40	13	14
3	60	70	11	12
4	7	8	9	10
5				
6	10	30	45	66
7	40	80	93	107
8	100	170	181	193
9	107	178	190	203

Вот так мы и получили, что максимальная денежная сумма, которую Робот сможет получить, пройдя из A1 в D4, равна 203 монетам, и мы это можем посчитать не только вручную. Если бы нам нужно было найти минимальную денежную сумму, мы делали все точно также, только в третьем пункте была бы формула не МАКС, а МИН, потому что нам нужно было бы выбирать минимальное, а не максимальное значение из двух соседних.

Попробуем решить немного другую задачу.

Пример 2:

Робот умеет выполнять лишь команды влево и вниз. По команде влево Робот перемещается на соседнюю левую клетку за один ход. По команде вниз Робот перемещается на соседнюю нижнюю клетку за один ход. При попытке выйти за границы квадрата Робот разрушается. Определите максимальную и минимальную денежные суммы, которые может собрать Робот, пройдя из верхней правой клетки в нижнюю левую. В ответ запишите оба числа подряд без разделителей.

Входные данные:

5	8	3	9	10
6	10	6	11	16
14	9	5	14	3
17	17	14	7	11
3	20	10	16	14

Решение:

Сначала реализуем первый пункт: переносим таблицу в Excel, создаем под исходной таблицей нашу вспомогательную таблицу и значение начальной клетки во вспомогательной таблице приравниваем значению начальной клетки в исходной таблице. Получаем:

	A	B	C	D	E
1	5	8	3	9	10
2	6	10	6	11	16
3	14	9	5	14	3
4	17	17	14	7	11
5	3	20	10	16	14
6					
7					=E1
8					
9					
10					
11					

Далее столбец под начальной клеткой и строку слева от начальной клетки исходя из того, что в те ячейки можно попасть лишь единственным способом:

	A	B	C	D	E
1	5	8	3	9	10
2	6	10	6	11	16
3	14	9	5	14	3
4	17	17	14	7	11
5	3	20	10	16	14
6					
7				=E7+D1	10
8					26
9					29
10					40
11					54

	A	B	C	D	E
1	5	8	3	9	10
2	6	10	6	11	16
3	14	9	5	14	3
4	17	17	14	7	11
5	3	20	10	16	14
6					
7	35	30	22	19	10
8					26
9					29
10					40
11					54

Теперь исходя из того, что в ячейку $D2$ можно попасть лишь из $D1$ и $E2$, прописываем в $D8$ формулу выбора максимального значения из $D1$ и $E2$ и прибавляем к этому значение самой $D2$. В итоге получаем:

	A	B	C	D	E
1	5	8	3	9	10
2	6	10	6	11	16
3	14	9	5	14	3
4	17	17	14	7	11
5	3	20	10	16	14
6					
7	35	30	22	19	10
8				=МАКС(D7;E8)+D2	
9					29
10					40
11					54

	A	B	C	D	E
1	5	8	3	9	10
2	6	10	6	11	16
3	14	9	5	14	3
4	17	17	14	7	11
5	3	20	10	16	14
6					
7	35	30	22	19	10
8	59	53	43	37	26
9	79	65	56	51	29
10	106	89	72	58	40
11	112	109	84	74	54

Теперь, так как от нас требуют не только максимальное значение, но и минимальное, изменим в *D2* формулу МАКС на МИН, также растянем влево и вниз и получим:

	A	B	C	D	E
1	5	8	3	9	10
2	6	10	6	11	16
3	14	9	5	14	3
4	17	17	14	7	11
5	3	20	10	16	14
6					
7	35	30	22	19	10
8	59	53	43	=МИН(D7;E8)+D2	
9	79	65	56	51	29
10	106	89	72	58	40
11	112	109	84	74	54

	A	B	C	D	E
1	5	8	3	9	10
2	6	10	6	11	16
3	14	9	5	14	3
4	17	17	14	7	11
5	3	20	10	16	14
6					
7	35	30	22	19	10
8	41	38	28	30	26
9	55	42	33	43	29
10	72	59	47	47	40
11	75	77	57	63	54

Таким образом, получаем, что максимально возможная сумма равна 112, а минимальная - 75. Следовательно, ответ: 11275.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1:

Квадрат разлинован на $N \times N$ клеток ($1 < N < 17$). Исполнитель Робот может перемещаться по клеткам, выполняя за одно перемещение одну из двух команд: **вправо** или **вверх**. По команде вправо Робот перемещается в соседнюю правую клетку, по команде вверх — в соседнюю верхнюю. При попытке выхода за границу квадрата Робот разрушается. Перед каждым запуском Робота в каждой клетке квадрата лежит монета достоинством от 1 до 100. Посетив клетку, Робот забирает монету с собой; это также относится к начальной и конечной клетке маршрута Робота.

11	21	15	18	6	14
15	20	35	28	45	21
37	10	14	27	23	16
8	15	1	32	16	23
44	14	24	34	44	33
21	4	9	1	12	24

Определите максимальную и минимальную денежную сумму, которую может собрать Робот, пройдя из **левой нижней** клетки в **правую верхнюю**. В ответ запишите два числа друг за другом без разделительных знаков — сначала максимальную сумму, затем минимальную.

Исходные данные представляют собой электронную таблицу размером $N \times N$, каждая ячейка которой соответствует клетке квадрата.

Пример входных данных:

1	4	12	2
8	1	14	6
12	5	3	3
2	15	5	8

Для указанных входных данных ответом будет 5333 (числа 53 и 33).

Задача 2:

Квадрат разлинован на $N \times N$ клеток ($1 < N < 17$). Исполнитель Робот может перемещаться по клеткам, выполняя за одно перемещение одну из двух команд: **вправо** или **вниз**. По команде вправо Робот перемещается в соседнюю правую клетку, по команде вверх — в соседнюю нижнюю. При попытке выхода за границу квадрата Робот разрушается. Перед каждым запуском Робота в каждой клетке квадрата лежит монета достоинством от 1 до 100. Посетив клетку, Робот забирает монету с собой; это также относится к начальной и конечной клетке маршрута Робота.

8	11	21	30	5	3
7	4	12	23	15	6
37	13	14	27	22	9
11	17	9	24	14	12
44	25	24	34	25	15
19	9	13	14	17	14

Определите минимальную денежную сумму, которую может собрать Робот, пройдя из **левой верхней** клетки в **правую нижнюю**.

В ответ запишите два одно число - минимальную сумму.

Исходные данные представляют собой электронную таблицу размером $N \times N$, каждая ячейка которой соответствует клетке квадрата.

Пример входных данных:

1	4	12	2
8	1	14	6
12	5	3	3
2	15	5	8

Для указанных входных данных ответом будет 25.

Задача 3:

Квадрат разлинован на $N \times N$ клеток ($1 < N < 17$). Исполнитель Робот может перемещаться по клеткам, выполняя за одно перемещение одну из двух команд: **влево** или **вверх**. По команде вправо Робот перемещается в соседнюю правую клетку, по команде вверх — в соседнюю нижнюю. При попытке выхода за границу квадрата Робот разрушается. Перед каждым запуском Робота в каждой клетке квадрата лежит монета достоинством от 1 до 100. Посетив клетку, Робот забирает монету с собой; это также относится к начальной и конечной клетке маршрута Робота.

4	12	23	15	6
13	14	27	22	9
17	9	24	14	12
25	24	34	25	15
9	13	14	17	14

Определите максимальную денежную сумму, которую может собрать Робот, пройдя из **правой нижней** клетки в **левую верхнюю**.

В ответ запишите два одно число - максимальную сумму.

Исходные данные представляют собой электронную таблицу размером $N \times N$, каждая ячейка которой соответствует клетке квадрата.

Пример входных данных:

1	4	12	2
8	1	14	6
12	5	3	3
2	15	5	8

Для указанных входных данных ответом будет 54.

Задача 4:

Квадрат разлинован на $N \times N$ клеток ($1 < N < 17$). Исполнитель Робот может перемещаться по клеткам, выполняя за одно перемещение одну из двух команд: **влево** или **вверх**. По команде вправо Робот перемещается в соседнюю правую клетку, по команде вверх — в соседнюю верхнюю. При попытке выхода за границу квадрата Робот разрушается. Перед каждым запуском Робота в каждой клетке квадрата лежит монета достоинством от 1 до 100. Посетив клетку, Робот забирает монету с собой; это также относится к начальной и конечной клетке маршрута Робота.

22	21	15	14	6	14
15	20	35	28	45	21
37	10	23	27	23	16
8	15	1	32	16	23
44	14	21	34	44	33
21	4	9	1	12	21

Определите максимальную и минимальную денежную сумму, которую может собрать Робот, пройдя из **правой нижней** клетки в **левую верхнюю**. В ответ запишите два числа друг за другом без разделительных знаков — сначала минимальную сумму, затем максимальную.

Исходные данные представляют собой электронную таблицу размером $N \times N$, каждая ячейка которой соответствует клетке квадрата.

Пример входных данных:

1	4	12	2
8	1	14	6
12	5	3	3
2	15	5	8

Для указанных входных данных ответом будет 2554 (числа 25 и 54).

Задача 5:

Квадрат разлинован на $N \times N$ клеток ($1 < N < 17$). Исполнитель Робот может перемещаться по клеткам, выполняя за одно перемещение одну из двух команд: **влево** или **вниз**. По команде вправо Робот перемещается в соседнюю правую клетку, по команде вверх — в соседнюю нижнюю. При попытке выхода за границу квадрата Робот разрушается. Перед каждым запуском Робота в каждой клетке квадрата лежит монета достоинством от 1 до 100. Посетив клетку, Робот забирает монету с собой; это также относится к начальной и конечной клетке маршрута Робота.

24	33	8	9	10
34	49	9	21	33
16	19	43	26	44
29	45	25	46	43
21	3	3	17	50

Определите максимальную и минимальную денежные суммы, которые может собрать Робот, пройдя из **правой верхней** клетки в **левую нижнюю**.

В ответ запишите одно число - произведение максимальной и минимальной сумм.

Исходные данные представляют собой электронную таблицу размером $N \times N$, каждая ячейка которой соответствует клетке квадрата.

Пример входных данных:

1	4	12	2
8	1	14	6
12	5	3	3
2	15	5	8

Для указанных входных данных ответом будет 1749 (произведение чисел 53 и 33).

Задача 6:

Квадрат разлинован на $N \times N$ клеток ($1 < N < 17$). Исполнитель Робот может перемещаться по клеткам, выполняя за одно перемещение одну из двух команд: **вправо** или **вниз**. По команде вправо Робот перемещается в соседнюю правую клетку, по команде вверх — в соседнюю нижнюю. При попытке выхода за границу квадрата Робот разрушается. Перед каждым запуском Робота в каждой клетке квадрата лежит монета достоинством от 1 до 100. Посетив клетку, Робот забирает монету с собой; это также относится к начальной и конечной клетке маршрута Робота.

42	49	21	21	1	10	39
24	29	7	7	44	2	48
43	49	35	1	4	20	48
42	29	5	50	36	42	12
28	36	29	14	31	16	28
13	5	17	1	48	47	20
49	3	26	34	3	7	39

Определите максимальную и минимальную денежные суммы, которые может собрать Робот, пройдя из **левой верхней** клетки в **правую нижнюю**.

В ответ запишите одно число - разность максимальной и минимальной сумм.

Исходные данные представляют собой электронную таблицу размером $N \times N$, каждая ячейка которой соответствует клетке квадрата.

Пример входных данных:

1	4	12	2
8	1	14	6
12	5	3	3
2	15	5	8

Для указанных входных данных ответом будет 29 (разность чисел 54 и 25).

Задача 7:

Квадрат разлинован на $N \times N$ клеток ($1 < N < 17$). Исполнитель Робот может перемещаться по клеткам, выполняя за одно перемещение одну из двух команд: **влево** или **вверх**. По команде вправо Робот перемещается в соседнюю правую клетку, по команде вверх — в соседнюю нижнюю. При попытке выхода за границу квадрата Робот разрушается. Перед каждым запуском Робота в каждой клетке квадрата лежит монета достоинством от 1 до 100. Посетив клетку, Робот забирает монету с собой; это также относится к начальной и конечной клетке маршрута Робота.

38	10	6	21	12	31	31	22	15	21
4	13	42	36	7	3	41	8	26	50
45	6	25	24	35	29	16	11	10	49
17	1	29	45	16	16	4	32	12	5
19	8	16	10	8	17	50	41	7	5
40	27	12	28	50	1	39	34	21	13
32	24	48	1	39	38	28	36	22	6
36	40	4	1	39	48	37	8	50	20
11	49	30	39	31	27	32	9	3	5
22	22	39	35	45	14	29	18	27	42

Определите максимальную и минимальную денежные суммы, которые может собрать Робот, пройдя из **нижней правой** клетки в **левую верхнюю**.

В ответ запишите одно число - результат целочисленного деления максимальной суммы на минимальную сумму.

Исходные данные представляют собой электронную таблицу размером $N \times N$, каждая ячейка которой соответствует клетке квадрата.

Пример входных данных:

1	4	12	2
8	1	14	6
12	5	3	3
2	15	5	8

Для указанных входных данных ответом будет 2 ($54 \text{ div } 25$).