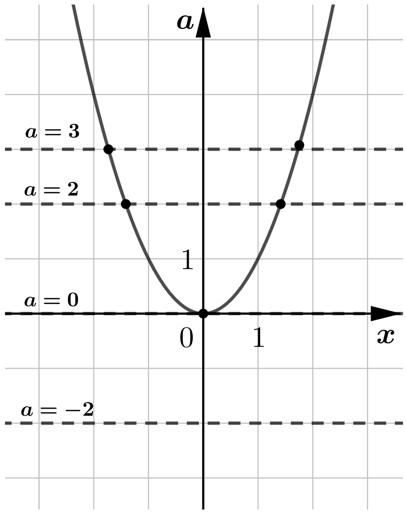
# Теория по №17

## Метод $xOa$

Рассмотрим уравнение $x^2 = a$. Мы понимаем, что оно имеет два решения при $a > 0$, одно — при $a = 0$ и не имеет решения при $a < 0$.

Давайте рассмотрим параметр $a$ как функцию от $x$. Тогда в системе координат $xOa$ мы получим такой график:




На самом деле мы изобразили на плоскости множество точек — решений уравнения $x^2 = a$, значит, если прямая $a = \text{const}$ пересекает полученный нами график в двух точках, то при данном $a$ уравнение $x^2 = a$ имеет ровно два решения. Аналогично с одним пересечением и отсутствием пересечений.

Теперь рассмотрим следующую задачу:

---

Найдите все значения параметра $a$, при которых уравнение

$$\frac{x^2 - (3a-1)\,x + 2a^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = 0$$

имеет единственное решение.

---

Преобразуем исходное уравнение:

$$\frac{x^2 - (3a-1)\,x + 2a^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2 - (3a-1)\,x + 2a^2 - 2 = 0 \\ x^2 - 3x - 4 \neq 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

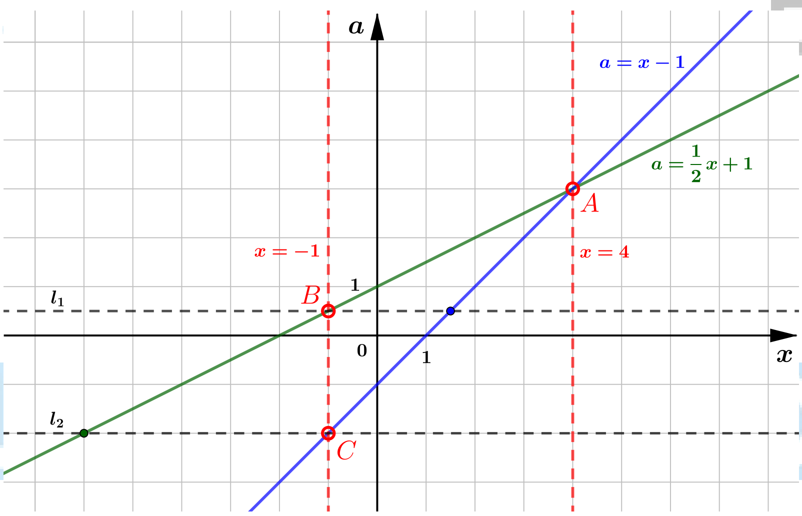
$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (x - (2a-2))\,(x - (a+1)) = 0 \\ (x-4)\,(x+1) \neq 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} &x = 2a - 2 \\ &x = a + 1 \end{aligned}\right. \\ x \neq 4 \\ x \neq -1 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} &a = \tfrac{1}{2}x + 1 \\ &a = x - 1 \end{aligned}\right. \\ x \neq 4 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Будем рассматривать параметр $a$ как переменную. Построим в системе координат $xOa$ множество $S$ решений системы. Если некоторая точка плоскости с координатами $(x_0; a_0)$ принадлежит этому множеству $S$, то для исходной задачи это означает, что если параметр $a$ принимает значение $a_0$, то $x_0$ будет одним из решений системы. Нас просят найти все такие значения $a_0$ параметра $a$, при каждом из которых ровно одна из точек вида $(x_0; a_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ принадлежат множеству решений $S$, изображенному на плоскости $xOa$. Фактически это равносильно тому, что горизонтальная прямая $a = a_0$ имеет ровно одну точку пересечения с множеством $S$.

Построим на плоскости множества решений каждого из уравнений внутренней совокупности, объединим их, а затем исключим точки, удовлетворяющих условиям $x = 4$ и $x = -1$.

- Множеством решений первого уравнения совокупности являются точки прямой $a = \frac{1}{2}x + 1$.
- Множеством решений второго уравнения совокупности являются точки прямой $a = x - 1$.
- Третье условие $x \neq 4$ задает всю плоскость за исключением точек прямой $x = 4$.
- Четвертое условие $x \neq -1$ задает всю плоскость за исключением точек прямой $x = -1$.

Построим графики.




Множество $S$ решений системы является объединением всех точек синей и зеленой прямых за исключением точек $A$, $B$ и $C$, выделенных красным и принадлежащих красным прямым.

Прямые $a = \frac{1}{2}x + 1$, $a = x - 1$ и $x = 4$ пересекутся точке $A = (4; 3)$. Прямые $a = \frac{1}{2}x + 1$ и $x = -1$ пересекутся точке $B = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$. Прямые $a = x - 1$ и $x = -1$ пересекутся точке $C = (-1; -2)$.

Заметим, что горизонтальные прямые, которые проходят через точку $A$, не будут иметь точек пересечения с $S$, а значит, не подойдут нам; горизонтальные прямые, которые проходят через одну из точек $B$ или $C$, будут иметь ровно одну точку пересечения с $S$, а значит, подойдут нам. Остальные горизонтальные прямые будут иметь две точки пересечения с $S$ и нам не подойдут. Значит, нам подходят только прямые $l_1 : a = \frac{1}{2}$ (прямая через $B$) и $l_2 : a = -2$ (прямая через $C$).

Ответ: $a \in \left\{\frac{1}{2}; -2\right\}$

## Замена в задаче с параметром

Главная идея заключается в том, чтобы найти такую замену $t = f(x)$, которая максимально упростит дальнейшее решение задачи. Никакой особенной теории на этот счет нет, однако нужно обратить внимание на следующий важный шаг, который должен быть в любом решении с заменой. Это **исследование** или **решение** замены. Решая уравнение $t = f(x)$ относительно $x$, мы выражаем $x$ через $t$ и выясняем, какое количество решений исходного уравнения/неравенства/системы соответствует каждому из решений полученного после замены уравнения/неравенства/системы, а также находим ограничения.

## Пример

Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение

$$(2x - x^2)^2 - 4\sqrt{2x - x^2} = a^2 - 4a$$

имеет хотя бы одно решение.

*ЕГЭ 2018*

### Ответ

$a \in [0; 1] \cup [3; 4]$

### Решение

Сделаем замену $t = \sqrt{2x - x^2}$. Исследуем новую переменную:

$$\begin{cases} -x^2 + 2x = t^2 \\ t \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-1)^2 = 1 - t^2 \\ t \geqslant 0 \end{cases}$$

Таким образом, при $1 - t^2 \geqslant 0$ и $t \geqslant 0$ решения будут, при остальных – нет.

$$\begin{cases} 1 - t^2 \geqslant 0 \\ t \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Рассмотрим уравнение, которое мы получаем после замены:

$$t^4 - 4t + 4 = a^2 - 14a + 4 \quad \Leftrightarrow \quad t^4 - 32t + 4 = (a-2)^2$$

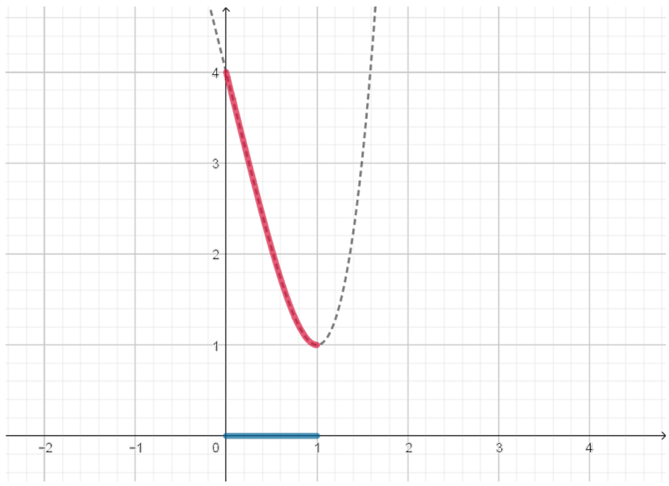
Введем функцию $f(t) = t^4 - 4t + 4$ и исследуем ее.

При $0 \leqslant t \leqslant 1$ система имеет решения относительно переменной $x$, при остальных $t$ решений не имеет.

Рассмотрим уравнение, которое мы получаем после замены:

$$t^4 - 4t + 4 = (a-2)^2$$

Исследуем функцию $f(t) = t^4 - 4t + 4$: она имеет производную $f'(t) = 4(t^3 - 1)$. Точка $t = 1$ является точкой минимума (так как при прохождении через эту точку слева направо производная меняет свой знак с плюса на минус), следовательно, график функции выглядит следующим образом:




Следовательно, уравнение $f(t) = k = \text{const}$ имеет решения (сразу учитывая, что $0 \leqslant t \leqslant 1$), если эта прямая пересекает часть графика, определенную при $t \in [0;1]$, то есть убывающий кусок функции. Следовательно, прямая должна находиться не ниже прямой, проходящей через наименьшую ординату точки графика, а также не выше прямой, проходящей через наибольшую ординату точки графика. Наименьшая ордината равна $f(1)$, наибольшая — это $f(0)$.

$$1 = f(1) \leqslant (a-2)^2 \leqslant f(0) = 4$$

Отсюда получаем ответ $a \in [0;1] \cup [3;4]$.