17 задание из ЕГЭ

2022

Теорема Виета

Если у квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ есть корни x_1, x_2, то $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

Обратная теорема Виета

Если известно, что сумма некоторых чисел $x+y=A$, их произведение $xy=B$, то если такие числа существуют, они являются корнями квадратного уравнения

$$p^2-Ap+B=0$$

Примеры, где встречается

- Найти сумму квадратов корней уравнения:

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}$$

- Определить, когда ровно один из двух корней положительный:

$$\begin{cases} D>0 \\ x_1x_2=\frac{c}{a}<0 \end{cases}$$

- Определить, когда имеет единственное решение система:

$$\begin{cases} x^2+y^2=A \\ x+y=B \end{cases}$$

Так как $A=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=B^2-2xy$, то $xy=0,5\,(B^2-A)$, следовательно, единственное решение у системы, если единственное решение имеет уравнение

$$p^2-Bp+0,5\,(B^2-A)=0$$

Метод хорошего/плохого корня

1. Находим все потенциальные корни, которые может иметь исходное уравнение. Каждый из них будет корнем уравнения, если удовлетворяет "своим" условиям: ОДЗ и условию задачи (например, лежит в некотором отрезке). Пусть таких корней два.
2. Назовем корень хорошим, если он удовлетворяет "своим" условиям, в противном случае — плохим. Найдем значения параметра a, при которых корень хороший. Пусть при $a\in A_1$ корень x_1 хороший, при $a\in A_2$ корень x_2 — хороший. Тогда при $a\in\mathbb{R}\backslash A_1$ корень x_1 — плохой, при $a\in\mathbb{R}\backslash A_2$ корень x_2 — плохой.
3. Смотрим, сколько корней должно иметь уравнение по условию задачи. Если требуется наличие одного корня, то это возможно в одном из трех случаев:
   - x_1 — хороший, x_2 — плохой $\begin{cases} a\in A_1 \\ a\in\mathbb{R}\backslash A_2 \end{cases}$
   - x_1 — плохой, x_2 — хороший $\begin{cases} a\in A_2 \\ a\in\mathbb{R}\backslash A_1 \end{cases}$
   - $x_1=x_2$ — хорошие и совпадающие $\begin{cases} a\in A_1 \\ x_1=x_2 \end{cases}$

Уравнения имеют общий корень

Если уравнения $f(x,a)=0$ и $g(x,a)=0$ имеют общий корень, то система

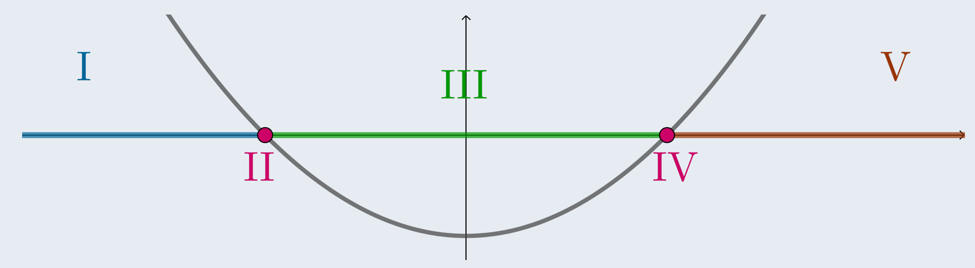
$$\begin{cases} f(x,a)=0 \\ g(x,a)=0 \end{cases}$$

имеет решения $(x_0;a_0)$. Причем число решений системы — число общих корней уравнений, где a_0 — значение параметра, при котором у уравнений x_0 — общий корень.

Квадратичная функция

Пусть $y=x^2+bx+c$ с вершиной x_0 имеет две точки пересечения с осью абсцисс. Введем названия:

- I – место левее меньшего корня
- II – меньший корень
- III – место между корнями
- IV – больший корень
- V – место правее большего корня



Положение точки k относительно корней

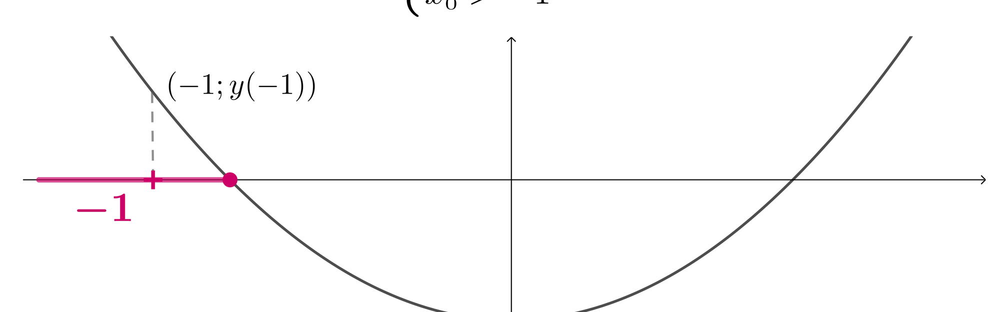
- I : $\begin{cases} D>0 \\ y(k)>0 \\ x_0>k \end{cases}$
- III : $y(k)<0$ ⋆
- V : $\begin{cases} D>0 \\ y(k)>0 \\ x_0<k \end{cases}$

⋆ условие $D>0$ необязательно, так как если у параболы с ветвями вверх есть хоть одна точка, где ее значение отрицательно, то она автоматически пересекает ось абсцисс в двух точках.

Примеры, где встречается

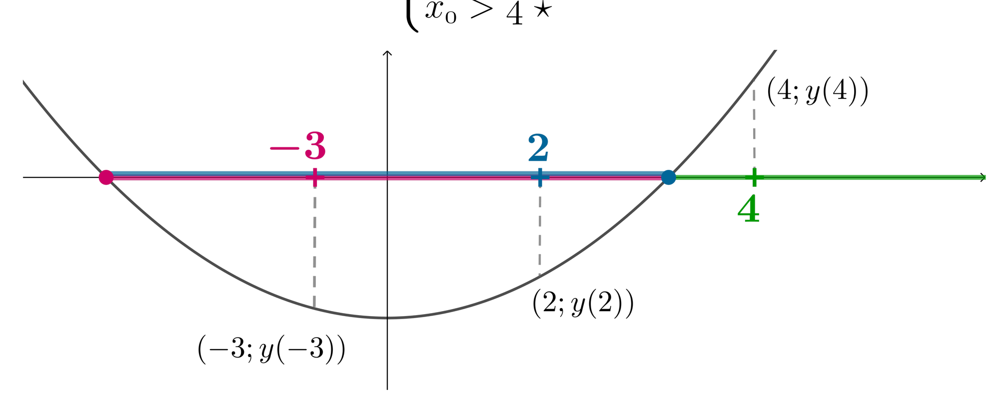
- Оба корня уравнения $y(x)=x^2+2(a-2)x-4a+5=0$ не меньше -1.
  То есть -1 должна располагаться в I или II местах, следовательно,

$$\begin{cases} D>0 \\ y(-1)\geqslant 0 \\ x_0>-1 \end{cases}$$



- Один корень уравнения $y(x)=x^2+2(a-2)x-4a+5=0$ заключен в $[2;4)$, а второй удовлетворяет $x\leqslant -3$.
  То есть -3 должна располагаться в II или III местах, 2 — в III или IV, 4 — в V месте, следовательно,

$$\begin{cases} D>0\,\star \\ y(-3)\leqslant 0 \\ y(2)\leqslant 0 \\ y(4)>0 \\ x_0>4\,\star \end{cases}$$



⋆ необязательно

Решение уравнение через исследование функций

Любое уравнение можно свести к виду $f(x)=0$ или $f(x)=g(x)$. Опишем некоторые свойства функций, помогающие в решении.

1. Сумма двух возрастающих функций – возрастающая функция;
2. Если $f(x)$ – возрастающая функция, то $-f(x)$ – убывающая функция;
3. Если $f(x)$ – возрастающая функция, то $f(x)+c$ – возрастающая функция ($c=\text{const}$).
4. Если функция $f(x)$ — строго монотонна на X, то из равенства $x_1=x_2$ ($x_1,x_2\in X$) следует $f(x_1)=f(x_2)$, и наоборот.
5. Если функция $f(x)$ — строго монотонна на X, то уравнение $f(x)=c$, где c — некоторое число, всегда имеет не более одного решения на X.
6. Если на $[a;b]$ $f(x)$ – возрастающая функция, а $g(x)$ – убывающая функция, то уравнение $f(x)=g(x)$ на $[a;b]$ имеет не более одного корня.
7. Если функция $f(x)$ — неубывает (невозрастает) и непрерывна на отрезке $[a;b]$, причем на концах отрезка она принимает значения $f(a)=A, f(b)=B$, то при $C\in[A;B]$ ($C\in[B;A]$) уравнение $f(x)=C$ всегда имеет хотя бы одно решение.
8. Если функция $f(x)$ непрерывна, то область значений функции будет содержать отрезок $[A;B]$, если имеют решения равенства $f(x)=A$ и $f(x)=B$.
9. Композиция функций одинакового характера монотонности — возрастающая, разного — убывающая. То есть если $f(x), g(x)$ – возрастающие функции, $h(x), p(x)$ – убывающие (на некотором множестве), то $f(g(x))$ – возрастающая, $f(h(x))$ – убывающая, $h(f(x))$ – убывающая, $h(p(x))$ – возрастающая.
10. Если $f(x)$ – возрастающая и знакопостоянная на некотором множестве (либо положительна, либо отрицательна), то $\dfrac{1}{f(x)}$ – убывающая. Аналогично с убывающей.
11. Если $f(x), g(x)$ – возрастающие неотрицательные функции, то $f(x)\cdot g(x)$ – возрастающая. Аналогично с убывающими.
12. Если $f(x)\leqslant 0$ и убывающая, $g(x)\geqslant 0$ и возрастающая, то $f(x)\cdot g(x)$ — убывающая.

Касание

- Касание двух функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ в точке x_0 задается системой

$$\begin{cases} f(x_0)=g(x_0) \\ f'(x_0)=g'(x_0) \end{cases}$$

- Касание параболы $y=ax^2+bx+c$ с невертикальной прямой $y_k=kx+p$ можно находить, требуя единственного корня от уравнения $y=y_k$, то есть $D=0$ от

$$ax^2+bx+c=kx+p$$

- Аналогично с гиперболой $y=\frac{a}{bx+c}+d$ с прямой $y_k=kx+p$.

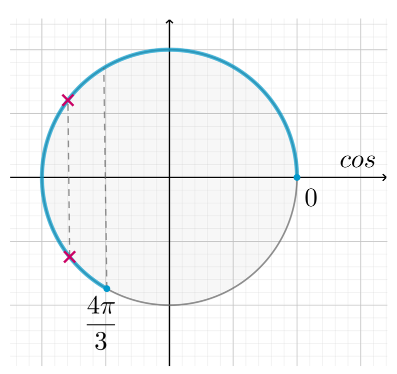
Работа с заменой

- $2a(x+1)^2-|x+1|+1=0$.

Замена $t=|x+1|$. Так как $|A|\geqslant 0\;\forall A$, то при $t<0$ решений x нет; $t=0$ дает один корень $x=-1$; каждый $t>0$ дает два корня $x=\pm t-1$.

- $\cos^2 x-(a+2)\cos x+2(a-1)=0$ при $x\in\left[0;\frac{4\pi}{3}\right]$.

Замена $t=\cos x$. Если x пробегает все значения из отрезка $\left[0;\frac{4\pi}{3}\right]$, то $\cos x$ пробегает все значения из отрезка $[-1;1]$, причем каждому $t\in(-1;-0,5]$ соответствует два угла x, а каждому $t\in\{-1\}\cup(-0,5;1]$ соответствует ровно один корень x.



- $4^{\sqrt{1-x^2}}+a\cdot 2^{\sqrt{1-x^2}}+a^2-1=0$

Замена $t=2^y$, $y=\sqrt{p}$, $p=1-x^2$. Заметим, что $0\leqslant p\leqslant 1$, причем $p=1$ дает один корень $x=0$, каждый из $0\leqslant p<1$ дает по два корня x. Следовательно, $y=\sqrt{1}=1$ дает один x, каждый из $0\leqslant y<1$ дает по два x. Тогда $t=2$ дает один корень $x=0$, каждый из $1\leqslant t<2$ дает по два корня x.

Метод главного модуля

У функции $f(x)=m|x-a|+n|x-b|$ с $m>n$ главным модулем будет модуль с большим коэффициентом m. Это значит, что переход через точку $x=a$ влияет на смену характера монотонности функции, например, при $x<a$ функция возрастает, а при $x>a$ функция убывает. То есть то, как себя ведет $|x-b|$, не влияет на характер монотонности функции.

Примеры, где встречается

- $f(x)=3\sqrt[5]{6,2x-5,2}+4\log_5(4x+1)+5a=0$.

Так как функции $y=\sqrt[5]{x}$, $y=6,2x-5,2$, $t=\log_5 x$, $y=4x+1$ возрастающие, то композиции этих функций — возрастающие функции, следовательно, $y=f(x)$ — возрастающая. Значит, уравнение $f(x)=0$ имеет не более одного корня.

- $64x^6+4x^2=(3x+a)^3+3x+a$.

Рассмотрим возрастающую функцию $f(t)=t^3+t$. Тогда уравнение имеет вид $f(4x^2)=f(3x+a)$. Из-за строгой монотонности $y=f(x)$ следует, что полученное уравнение равносильно $4x^2=3x+a$.

- $x^3+ax^2+13x-6=0$.

Исследуем уравнение, разделив обе части на x^2, так как $x=0$ не является корнем. Получим $a=-x-\frac{13}{x}+\frac{6}{x^2}$. Получили уравнение в виде $a=f(x)$. Далее исследуем функцию $y=f(x)$ (с помощью фактов левее либо через производную), рисуем ее график. Если, например, уравнение должно иметь одно решение, то ищем такие горизонтальные прямые $y=a$, при которых с графиком $y=f(x)$ имеется одна точка пересечения.

- $\log_a(ax)=2-x^5$ при $a>1$.

Функция $f(x)=\log_a(ax)$ при $a>1$ возрастающая, функция $g(x)=2-x^5$ убывающая, следовательно, уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного решения. Подбором находим корень $x=1$.
P.S. Да, обращаем внимание, что подбор корня в параметре — не редкость. Как видите, в этой задаче мы доказали, что корней не более одного и один нашли, значит, решение полно.

- $f(x)=4-|3x-|x+a||-9|x-1|=0$.

Главным модулем является $|x-1|$. Выражение $|3x-|x+a||$ при всех возможных способах раскрытия модулей будет выглядеть как $kx+b$, где $k\in\{\pm2;\pm4\}$.
Таким образом, при $x<1$ получим $f(x)=Ax+B$, где $A\in\{9\pm2;9\pm4\}$, то есть $A>0$, следовательно, $f(x)\uparrow$; при $x>1$ получим $f(x)=Ax+B$, где $A\in\{-9\pm2;-9\pm4\}$, то есть $A<0$, следовательно, $f(x)\downarrow$.

Метод оценки

Если $f(x)\geqslant c$, $g(x)\leqslant c$ при любом x, то равенство

$$f(x)=g(x)$$

возможно тогда и только тогда, когда $f(x)=g(x)=c$.

Функции, которые нужно знать

Функция	Область значений (значение y)	Область определения (значение x)
$y=x^2$	$y\geqslant 0$	$x\in\mathbb{R}$
$y=x+\frac{1}{x}$	$y\geqslant 2$, если $x>0$ $y\leqslant -2$, если $x<0$	$x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$y=\lvert x\rvert+\lvert 1-x\rvert$	$y\geqslant 1$, причем $y=1$, если $x\in[0;1]$	$x\in\mathbb{R}$
$y=\lvert x-a\rvert+\lvert x+a\rvert$	$y\geqslant 2\lvert a\rvert$, причем $y=2\lvert a\rvert$, если $x\in[-\lvert a\rvert;\lvert a\rvert]$	$x\in\mathbb{R}$

Важные неравенства

- $\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2}{2}}\geqslant\dfrac{a_1+a_2}{2}\geqslant\sqrt{a_1a_2}\geqslant\dfrac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}\qquad a_1,a_2>0$
- $|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$

Модульные неравенства

- $|A|>|B|\;\Leftrightarrow\;A^2>B^2$
- $|A|>B\;\Leftrightarrow\;\left[\begin{array}{l} A>B \\ A<-B \end{array}\right.$
- $|A|<B\;\Leftrightarrow\;\begin{cases} A<B \\ A>-B \end{cases}$