Теория по №17 Школково

Часть 1. Метод «гвоздей». Метод хорошего и плохого корня. Теорема Виета

Метод «гвоздей»

Рассмотрим следующую задачу:

При каких значениях параметра a уравнение

$$x^2 + 3ax - a^2 + 1 = 0$$

имеет два корня из отрезка $[-3; 0]$?

Сначала поймём, сколько всего корней может иметь данное нам уравнение. Так как оно квадратное, у него может быть максимум два корня. По условию уравнение должно иметь два корня на отрезке $[-3; 0]$, значит, мы получили первое условие на параметр a — дискриминант данного квадратного уравнения должен быть больше 0, то есть $D > 0$.

Замечание. *В задаче, которую мы рассматриваем, коэффициент при x^2 равен единице, то есть ветви параболы этого уравнения всегда направленны вверх. А что, если бы коэффициент при x^2 зависел от параметра a?*

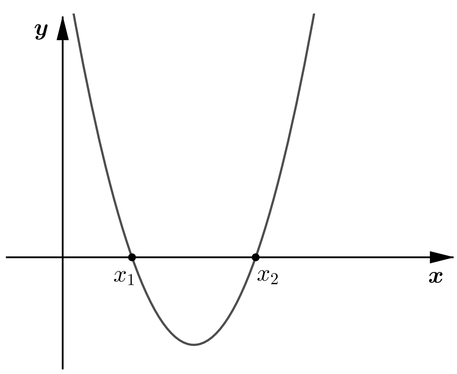
Например, нам было бы дано уравнение

$$(a-1)x^2 + 3ax - a^2 + 1 = 0$$

В такой задаче с параметром важно в самом начале решения определить вид уравнения, потому что от этого зависит количество его корней. В нашем случае уравнение было бы квадратным только при $a - 1 \neq 0$, при $a-1 < 0$ ветви параболы этого уравнения были бы направленны вниз, а при $a-1 > 0$ — вверх. При $a-1 = 0$ уравнение было бы линейниым и не могло бы иметь два корня. Все эти случаи пришлось бы рассматривать отдельно.

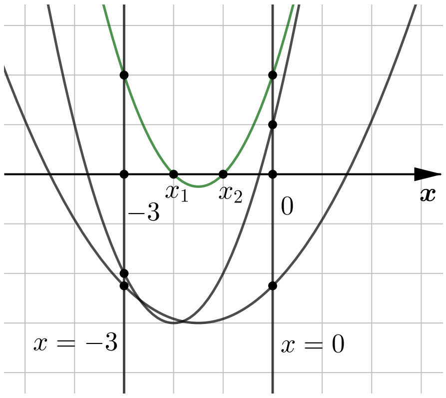
Вернёмся к нашей задаче. Мы поняли, что дискриминант нашего уравнения должен быть больше 0, то есть мы получили первое условие-ограничение на значения параметра a. Будем называть такие ограничения «гвоздями».

Итак, первым «гвоздём» мы заставили нашу параболу пересекать ось абсцисс в двух точках, то есть выглядеть так:



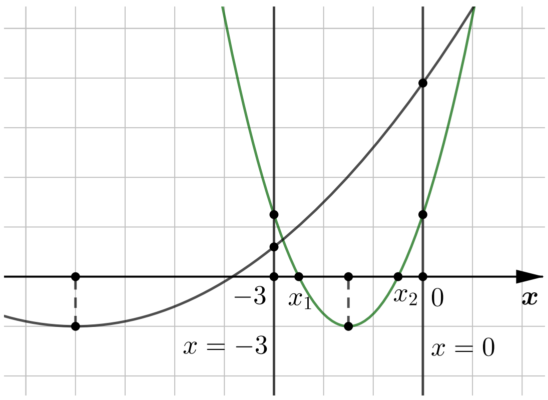
Далее будем накладывать новые ограничения на параметр a — «прибивать гвоздями» нашу параболу так, чтобы в итоге эти ограничениям удовлетворяли только значения параметра, при которых парабола дважды пересекает ось абсцисс на отрезке $[-3; 0]$.

Поймем, какими должны быть эти ограничения. Давайте посмотрим на несколько парабол с ветвями вверх:



Зеленая парабола точно подходит под условие задачи, так как ее корни x_1 и x_2 лежат на отрезке $[-3; 0]$. У двух других парабол выполняется условие $D > 0$, но у одной из них оба корня лежат вне отрезка $[-3; 0]$, у другой один лежит на отрезке, а второй — вне. Эти параболы отличаются тем, что хотя бы в одной из точек $x = -3$ и $x = 0$ их значения отрицательны.

У зеленой параболы (заметим, что все параболы подходящего нам вида схематично будут выглядеть как зеленая) значения в обоих концах отрезка неотрицательны. Тогда, если мы обозначим $f(x) = x^2 + 3ax - a^2 + 1$, то, чтобы нам подходить, функция f должна удовлетворять условиям $f(-3) \geqslant 0$ и $f(0) \geqslant 0$. Знаки в этих неравенствах нестрогие, так как парабола может проходить через точки $(-3; 0)$ и $(0; 0)$ и при этом подходить под условие задачи. Теперь у нас есть три «гвоздя», которые ограничивают нашу параболу. Но этого недостаточно, так как бывают такие параболы:



Такая парабола отличается от зеленой тем, что координата ее вершины по x не лежит на отрезке $[-3; 0]$, в отличие от вершины зеленой параболы. Значит, если мы обозначим координату вершины параболы по оси x через x_0, то получим следующее ограничение: $-3 < x_0 < 0$. Действительно, ведь у любой подходящей параболы корни лежат на отрезке $[-3; 0]$, а вершина, в свою очередь, лежит между этими корнями. Знаки строгие, так как если x-координата вершины параболы совпадет с одним из концов отрезка $[-3; 0]$, то один из корней точно выйдет за его пределы. Тем самым мы получили четвертый «гвоздь», который окончательно фиксирует положение нашей параболы. Теперь остается лишь решить систему, которую задают полученные нами ограничения. Имеем:

$$\begin{cases} D > 0 \\ f(-3) \geqslant 0 \\ f(0) \geqslant 0 \\ -3 < x_0 < 0 \end{cases}$$

Решим каждое из условий по-отдельности. Условие на дискриминант:

$$D > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9a^2 + 4a^2 - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - \frac{4}{13} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(a - \frac{2}{\sqrt{13}}\right)\left(a + \frac{2}{\sqrt{13}}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a < -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ a > \frac{2}{\sqrt{13}} \end{array}\right.$$

Условие на значение в точке $x = -3$:

$$f(-3) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9 - 9a - a^2 + 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + 9a - 10 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)(a+10) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -10 \leqslant a \leqslant 1$$

Условие на значение в точке $x = 0$:

$$f(0) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -a^2 + 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 1 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)(a+1) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant a \leqslant 1$$

Условие на координату вершины параболы. x-координата вершины параболы равна $-\frac{3}{2}a$, тогда

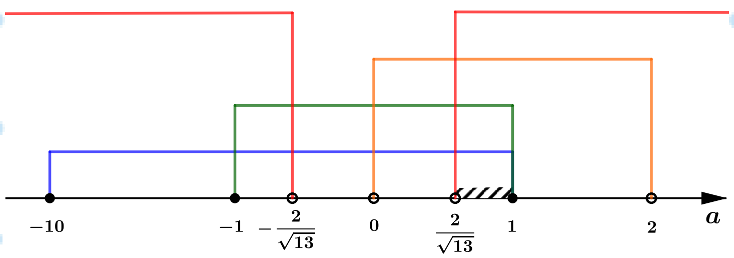
$$-3 < -\frac{3}{2}a < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < a < 2$$

ШКОЛКОВО

Так как все условия находились в системе, нам нужно найти пересечение полученных нами промежутков. Сразу определим порядок чисел -10, ± 1, $\pm\frac{2}{\sqrt{13}}$, 0 и 2 на числовой прямой. Очевидно, что $-10 < -1 < 0 < 1 < 2$. Оценим число $\frac{2}{\sqrt{13}}$:

$$9 < 13 < 16 \quad \Rightarrow \quad 3 < \sqrt{13} < 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} > \frac{2}{\sqrt{13}} > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{2}{\sqrt{13}} < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < -\frac{2}{\sqrt{13}} < 0$$

Значит, числа расположены на числовой прямой так: $-10 < -1 < -\frac{2}{\sqrt{13}} < 0 < \frac{2}{\sqrt{13}} < 1 < 2$. Тогда найдем пересечение полученных промежутков:



Пересечением является промежуток, над которым есть все 4 «крышечки» от полученных нами ограничений, то есть полуинтервал $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}; 1\right]$. Значит, исходное уравнение имеет 2 корня на отрезке $[-3; 0]$ при $a \in \left(\frac{2}{\sqrt{13}}; 1\right]$.

Метод хорошего и плохого корня

Рассмотрим следующую задачу:

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5x-3}\cdot\ln\left(x^2-6x+10-a^2\right)=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;3]$.

Важной особенностью данного вида заданий является то, что само уравнение не обязано иметь ровно один корень. Точек, в которых уравнение принимает значение 0 может быть несколько, но важно то, что на отрезке $[0;3]$ такая точка ровно одна.

На первом шаге найдем «кандидатов» — все возможные корни уравнения. На данном шаге мы не будем учитывать ОДЗ уравнения.

- Первый множитель равен нулю

$$\sqrt{5x-3}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 5x-3=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1=\frac{3}{5}$$

- Второй множитель равен нулю

$$\ln\left(x^2-6x+10-a^2\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-6x+10-a^2=1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-6x+9=a^2 \quad\Leftrightarrow\quad (x-3)^2=a^2 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad x-3=\pm a \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x_2=a+3\\ x_3=3-a\end{array}\right.$$

Назовем число «хорошим», если оно является корнем уравнения (в том числе удовлетворяет ОДЗ) и принадлежит отрезку $[0;3]$. В противном случае назовем число «плохим». Теперь выясним, при каких значениях параметра a каждый из «кандидатов» является хорошим.

- $x_1=\frac{3}{5}$ является хорошим, если x_1 удовлетворяет ОДЗ и принадлежит $[0;3]$. Так как x_1 — корень уравнения $\sqrt{5x-3}=0$ и $0<\frac{3}{5}<3$, достаточно найти такие a, при которых x_1 удовлетворяет ОДЗ логарифма. Сделаем это:

$$x_1^2-6x_1+10-a^2>0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{9}{25}-\frac{18}{5}+10-a^2>0 \quad\Leftrightarrow\quad a^2<\frac{169}{25} \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{13}{5}<a<\frac{13}{5}$$

  Мы получили, что при $a\in\left(-\frac{13}{5};\frac{13}{5}\right)$ корень x_1 является хорошим, значит, при $a\in\left(-\infty;-\frac{13}{5}\right]\cup\left[\frac{13}{5};+\infty\right)$ он является плохим.

- $x_2=a+3$ является хорошим, если x_2 удовлетворяет ОДЗ и принадлежит $[0;3]$. Так как x_2 — корень уравнения $\ln\left(x^2-6x+10-a^2\right)=0$, достаточно найти a, при которых x_2 удовлетворяет ОДЗ квадратного корня и лежит на отрезке $[0;3]$. Имеем:

$$\begin{cases}5(a+3)-3\geqslant 0\\ 0\leqslant a+3\leqslant 3\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}5a+12\geqslant 0\\ -3\leqslant a\leqslant 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}a\geqslant -\frac{12}{5}\\ -3\leqslant a\leqslant 0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad -\frac{12}{5}\leqslant a\leqslant 0$$

  Мы получили, что при $a\in\left[-\frac{12}{5};0\right]$ корень x_2 является хорошим, значит, при $a\in\left(-\infty;-\frac{12}{5}\right)\cup(0;+\infty)$ он является плохим.

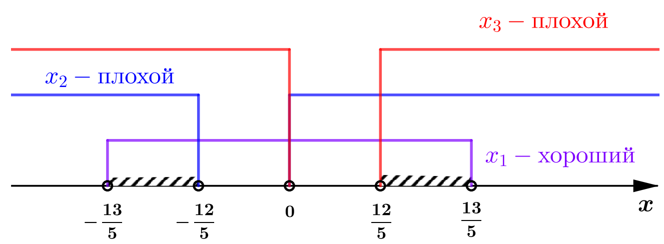
- $x_3 = 3 - a$ является хорошим, если x_3 удовлетворяет ОДЗ и принадлежит $[0; 3]$. Так как x_3 — корень уравнения $\ln\left(x^2 - 6x + 10 - a^2\right) = 0$, достаточно найти a, при которых x_3 удовлетворяет ОДЗ квадратного корня и лежит на отрезке $[0; 3]$. Имеем:

$$\begin{cases} 5(3-a) - 3 \geqslant 0 \\ 0 \leqslant 3 - a \leqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - 5a \geqslant 0 \\ -3 \leqslant -a \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant \frac{12}{5} \\ 0 \leqslant a \leqslant 3 \end{cases} \Rightarrow 0 \leqslant a \leqslant \frac{12}{5}$$

Мы получили, что при $a \in \left[0; \frac{12}{5}\right]$ корень x_3 является хорошим, значит, при $a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{12}{5}; +\infty\right)$ он является плохим.

Таким образом, мы узнали, при каких значениях параметра a каждый из «кандидатов» по отдельности является хорошим и при каких плохим. Теперь для каждого из «кандидатов» осталось понять, при каких a только он является хорошим (ведь нам нужно, чтобы уравнение имело ровно один корень).

- x_1 — хороший, x_2 и x_3 — плохие. Это значит, что нам нужно найти пересечения полученных ранее значений a, то есть:



ШКОЛКОВО

Мы получили, что только корень x_1 является хорошим при $a \in \left(-\frac{13}{5}; -\frac{12}{5}\right) \cup \left(\frac{12}{5}; \frac{13}{5}\right)$.

- x_2 — хороший, x_1 и x_3 — плохие. В общем случае нам пришлось бы честно пересечь все три множества и получить ответ, но в этой конкретной задаче можно поступить проще. Заметим, что отрезок $\left[-\frac{12}{5}; 0\right]$, на котором x_2 является хорошим, полностью лежит в интервале $\left(-\frac{13}{5}; \frac{13}{5}\right)$, на котором x_1 тоже является хорошим, то есть если x_2 — хороший, то x_1 тоже хороший. Тогда значений a, при которых x_2 — хороший, а x_1 — плохой, не существует.

- x_3 — хороший, x_1 и x_2 — плохие. Аналогично предыдущему рассуждению заметим, что отрезок $\left[0; \frac{12}{5}\right]$, на котором x_3 является хорошим, полностью лежит в интервале $\left(-\frac{13}{5}; \frac{13}{5}\right)$, на котором x_1 тоже является хорошим, то есть значений a, при которых x_3 — хороший, а x_1 — плохой, не существует.

Мы проверили всех «кандидатов» и получили значения a, при которых ровно один из них является хорошим. Теперь нужно учесть, что при некоторых значениях параметра a, какие-то из чисел x_1, x_2 и x_3 могли совпасть. Рассмотрим попарные совпадения.

- Если $x_1 = x_2$:

$$x_1 = x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{5} = a + 3 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{12}{5}$$

При $a = -\frac{12}{5}$ корни x_1 и x_2 — хорошие, а x_3 — плохой. Значит, при $a = -\frac{12}{5}$ на отрезке $[0; 3]$ есть всего один корень, так как x_1 и x_2 при таком значении a совпадают. Это значение a нужно добавить в ответ.

- Если $x_1 = x_3$:

$$x_1 = x_3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{5} = 3 - a \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{12}{5}$$

При $a = \frac{12}{5}$ корни x_1 и x_3 — хорошие, а x_2 — плохой. Значит, при $a = \frac{12}{5}$ на отрезке $[0; 3]$ есть всего один корень, так как x_1 и x_3 при таком значении a совпадают. Это значение a нужно добавить в ответ.

- Если $x_2 = x_3$:

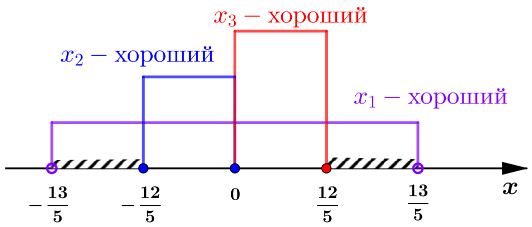
$$x_2 = x_3 \quad \Leftrightarrow \quad a + 3 = 3 - a \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$$

  При $a = 0$ все корни хорошие, значит, на отрезке $[0; 3]$ есть два различных корня: $x_1 = \frac{3}{5}$ и $x_2 = x_3 = 3$. Это значение a не подойдет.

Мы получили, что ровно один хороший «кандидат» есть еще при $a = \pm\frac{12}{5}$. Тогда ответом в задаче являются

$$a \in \left(-\frac{13}{5}; -\frac{12}{5}\right] \cup \left[\frac{12}{5}; \frac{13}{5}\right)$$

Замечание. *Также можно было искать значения параметра a, при которых есть ровно один хороший корень немного иначе. На числовой прямой для каждого корня отметим те значения a, при которых он хороший, и найдем такие значения a, при которых хороший корень только один (это точки числовой прямой, находящиеся ровно под одной «крышечкой»).*



Таким образом, получили $a \in \left(-\frac{13}{5}; -\frac{12}{5}\right) \cup \left(\frac{12}{5}; \frac{13}{5}\right)$ — такое же множество значений a. После этого нужно также проверить совпадения корней и получить такой же ответ, что и в первом варианте решения

$$a \in \left(-\frac{13}{5}; -\frac{12}{5}\right] \cup \left[\frac{12}{5}; \frac{13}{5}\right)$$

Теорема Виета

Вспомним теорему Виета. Рассмотрим уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с неотрицательным дискриминантом. Пусть x_1 и x_2 — его корни (необязательно различные). Тогда

$$ax^2 + bx + c = a\cdot(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - x\cdot a\cdot(x_1 + x_2) + ax_1x_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b = -a(x_1 + x_2) \\ c = ax_1x_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Теперь решим следующую задачу:

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(a - 3)x^2 - 2ax + 5a = 0$$

имеет решения, и все его решения положительные.

С самого начала определим, при каких значениях a данное уравнение не является квадратным, то есть когда коэффициент при x^2 равен 0:

$$(a - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 3$$

При $a = 3$ мы получаем уравнение

$$-6x + 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2,5$$

Значит, при $a = 3$ единственным корнем данного уравнения является $x = 2,5 > 0$. Следовательно, значение $a = 3$ подходит под условие.

Далее будем рассматривать $a \neq 3$. При таких значениях параметра a данное нам уравнение является квадратным. Найдем $\frac{D}{4}$.

$$\frac{D}{4} = a^2 - 5a^2 + 15a = -4a^2 + 15a$$

Рассмотрим два случая: когда $\frac{D}{4} = 0$ и $\frac{D}{4} > 0$. Случай $\frac{D}{4} < 0$ нам не подходит, так как при нем уравнение не будет иметь корней вовсе.

- Если $\dfrac{D}{4} = 0$:

$$\frac{D}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4a^2 + 15a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\left(15 - 4a\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &a = 0 \\ &a = \tfrac{15}{4} \end{aligned}\right.$$

  Найдем корни данного уравнения при полученных значениях a. Если $a = 0$, то

$$x = \frac{a \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a - 3} = \frac{a}{a - 3} = 0$$

  Если $a = \frac{15}{4}$, то

$$x = \frac{a \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a - 3} = \frac{a}{a - 3} = \frac{15}{4} \cdot \frac{4}{3} = 5$$

  Мы получили, что при $a = 0$ у уравнения нет положительных корней, то есть это значение нам не подходит. При $a = \frac{15}{4}$ есть один корень, и он положителен, следовательно, $a = \frac{15}{4}$ подходит под условие.

- Если $\frac{D}{4} > 0$. В таком случае уравнение имеет два различных корня. По условию они оба должны быть положительными. Заметим, что если это так, то сумма корней и их произведение тоже должны быть положительны, значит,

$$\begin{cases} \frac{D}{4} > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a^2 + 15a > 0 \\ \frac{2a}{a-3} > 0 \\ \frac{5a}{a-3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a\left(4a - 15\right) > 0 \\ \left[\begin{aligned} &a < 0 \\ &a > 3 \end{aligned}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < \frac{15}{4} \\ \left[\begin{aligned} &a < 0 \\ &a > 3 \end{aligned}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad 3 < a < \frac{15}{4}$$

Остается объединить все полученные значения параметра a. Ответ: $a \in \left[3; \frac{15}{4}\right]$.

Замечание. *Если бы в задаче было сказано, что один корень должен быть отрицательным, а другой положительным, нам нужно было бы наложить всего одно условие на корни уравнения:* $x_1 x_2 < 0$.

ШКОЛКОВО