10 часов параметры Школково

Подробный конспект

Содержание

1 Раунд 1

1.1 Решить при всех значениях параметров a и b

1.(a) $ax = b$

Возможны два случая

1. $a = 0$, тогда имеем $0 \cdot x = b$. Возможны два случая

   1.1. $b \neq 0, \quad x \in \varnothing$

   1.2. $b = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

2. $a \neq 0$, тогда $x = \frac{b}{a}$.

Ответ:

$$\begin{aligned} &a = 0,\ b \neq 0 \quad x \in \varnothing \\ &a = 0,\ b = 0 \quad x \in \mathbb{R} \\ &a \neq 0,\ b \in \mathbb{R} \quad x = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

1.(b) $x^2 = a$

Возможны два случая

1. $a < 0, \quad x \in \varnothing$

2. $a \geqslant 0$

   2.1. $a > 0, \quad x = \pm\sqrt{a}$ (два решения)

   2.2. $a = 0, \quad x = 0$ (одно решение)

Ответ:

$$\begin{aligned} &a < 0, \quad x \in \varnothing \\ &a > 0, \quad x = \pm\sqrt{a} \\ &a = 0, \quad x = 0 \end{aligned}$$

1.(c) $\sqrt{x - a} = a^2 - 1$

Рассмотрим сначала более общую ситуацию. Пусть мы имеем уравнение вида $\sqrt{A} = B$, где A и B произвольные выражения. Очевидно, что оно равносильно системе

$$\begin{cases} A = B^2 \\ A \geqslant 0 \\ B \geqslant 0 \end{cases}$$

Заметим однако, что второе условие системы $A \geqslant 0$ всегда будет выполняться, если выполнено первое условие $A = B^2$ (действительно, если некое выражение равно квадрату другого выражения, то оно должно быть неотрицательно). Получили, что второе условие избыточно, значит, система

$$\begin{cases} A = B^2 \\ B \geqslant 0 \end{cases}$$

эквивалентна первой и исходному уравнению.

Воспользуемся этим в исходной задаче, получим

$$\sqrt{x-a} = a^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - a = (a^2-1)^2 \\ a^2 - 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения получим $x = (a^2-1)^2 + a$.

Из второго $a^2 - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

Ответ:

$$\begin{aligned} &a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \quad x = (a^2-1)^2 + a \\ &a \in (-1; 1) \quad x \in \varnothing \end{aligned}$$

1.(d) $x + \frac{1}{x} = a$

Докажем, что $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geqslant 2$. При положительных x имеем

$$\begin{aligned} &x + \frac{1}{x} \overset{?}{\geqslant} 2 \\ &x^2 + 1 \overset{?}{\geqslant} 2x \\ &(x-1)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Для отрицательных доказывается аналогично. Итого

1. При $|a| < 2 \quad x \in \varnothing$
2. При $|a| = 2$ существует 1 решение
3. При $|a| > 2$ существует 2 решения

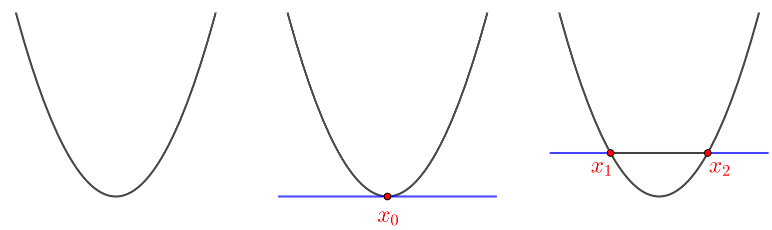
1.(h) $ax^2 + x + 4a^3 > 0$

Нужно разобрать два случая: когда слева квадратный трехчлен, и когда он вырождается ($a = 0$).

1. $a = 0, \quad x > 0$
2. $a \neq 0$

   Теперь мы точно знаем, что имеем дело с параболой, далее возможны два варианта: ее ветви направлены вверх, либо вниз. В обоих случаях ниже x_1 — меньший из корней, x_2 — больший (меньший, это совершенно не обязательно тот, у которого знак минус в формуле перед корнем из дискриминанта!).

   2.1. $a > 0$, ветви параболы направлены вверх. Тогда график параболы может выглядеть одним из трех способов, в зависимости от дискриминанта $D = 1 - 16a^4$.



$D < 0$ $D = 0$ $D > 0$

2.1.1. $D < 0$

$$1 - 16a^4 < 0 \Rightarrow |a| > \frac{1}{2},\ a > 0 \Rightarrow a > \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

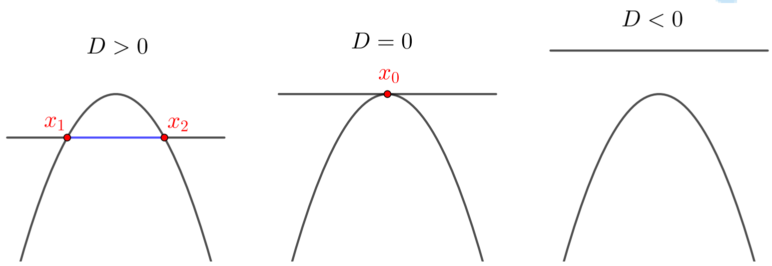
2.1.2. $D = 0$

$$1 - 16a^4 = 0 \Rightarrow |a| = \frac{1}{2},\ a > 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0\}$$

2.1.3. $D > 0$

$$1 - 16a^4 > 0 \Rightarrow |a| < \frac{1}{2},\ a > 0 \Rightarrow a \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \quad x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$$

2.2. $a < 0$, ветви параболы направлены вниз. Снова график параболы может выглядеть одним из трех способов, в зависимости от дискриминанта $D = 1 - 16a^4$.



2.2.1. $D < 0$

$$1 - 16a^4 < 0 \Rightarrow |a| > \frac{1}{2},\ a < 0 \Rightarrow a < -\frac{1}{2}, \quad x \in \varnothing$$

2.2.2. $D = 0$

$$1 - 16a^4 = 0 \Rightarrow |a| = \frac{1}{2},\ a < 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \quad x \in \varnothing$$

2.2.3. $D > 0$

$$1 - 16a^4 > 0 \Rightarrow |a| < \frac{1}{2},\ a < 0 \Rightarrow a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \quad x \in (x_1; x_2)$$

Ответ:

$$\begin{aligned}
&a = 0, \quad x > 0 \\
&a > \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R} \\
&a = \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0\} \\
&a \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \quad x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty) \\
&a < -\frac{1}{2}, \quad x \in \varnothing \\
&a = -\frac{1}{2} \quad x \in \varnothing \\
&a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \quad x \in (x_1; x_2)
\end{aligned}$$

1.2 Прямая и обратная теоремы Виета и задачи на них

Теорема Виета Дан квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$, имеющий корни x_1, x_2 (возможно совпадающие), тогда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Обратная теорема Виета Дана система с неизвестными x и y

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$$

Тогда каждое решение системы является парой корней (возможно совпадающих) квадратного трехчлена t^2-at+b.

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(a-3)x^2-2ax+5a=0$$

имеет решения и все решения этого уравнения положительные.

Ответ

$a\in[3;3.75]$

Решение

Данное уравнение квадратного типа и вырождается в линейное при $a=3$. Рассмотрим этот случай отдельно. Тогда уравнение примет вид $-2x+5=0$, откуда $x=2.5>0$, следовательно, данное значение a нам подходит.

Пусть $a\neq 3$. Тогда уравнение квадратное. Для того, чтобы оба корня квадратного уравнения были положительны, необходимо, чтобы их сумма и произведение были положительны (и эти корни были вообще!). Следовательно, по теореме Виета

$$\begin{cases} \dfrac{2a}{a-3}>0 \\ \dfrac{5a}{a-3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$$

А также дискриминант $D=4a^2-20a(a-3)\geqslant 0$, откуда $a\in[0;3.75]$. Пересекая с решением системы, а затем объединяя с $a=3$, в итоге получаем $a\in[3;3.75]$.

3. Найдите все a, при которых уравнение

$$121^x+(3a^2-a+4)\cdot 11^x-5a-2=0$$

имеет единственный корень.

Ответ

$a>-\frac{2}{5}$

Решение

Сделаем замену $t=11^x$. Заметим, что каждому $t>0$ соответствует ровно одно значение x, а при $t\leqslant 0$ уравнение замены не имеет решений относительно x. Запишем уравнение после замены.

$$t^2+(3a^2-a+4)\cdot t-5a-2=0,\quad D=(3a^2-a+4)^2+4\cdot(5a+2)$$

Получили квадратное уравнение. Исходное уравнение будет иметь единственное решение, когда уравнение от t имеет корни, причем ровно один из них положителен. Возможны две подходящие ситуации:

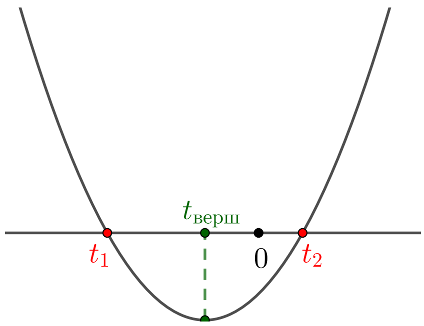
1. $D = 0,\ t_0 > 0$ (в данном случае корень совпадает с координатой вершины параболы)

$$t_0 = t_{\text{верш}} = -\frac{(3a^2 - a + 4)}{2}$$

Рассмотрим $3a^2 - a + 4$: $D = 1 - 4 \cdot 4 \cdot 3 < 0$, ветви направлены вверх $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} : 3a^2 - a + 4 > 0$, тогда корень t_0 отрицателен при любых a, и данный случай невозможен.

2. $D > 0,\ t_1 \leqslant 0 < t_2$ (будем считать, что t_2 — больший корень)

Из первого случая мы знаем, что $t_{\text{верш}} < 0$. Заметим также, что при $D > 0 \quad t_1 < t_{\text{верш}} < t_2$. Получаем, что единственная возможная ситуация $t_1 < t_{\text{верш}} < 0 < t_2$.



$$t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow t_1 \cdot t_2 < 0$$

$$t_1 \cdot t_2 = -(5a + 2) \text{ (по теореме Виета)}$$

$$-(5a + 2) < 0 \Leftrightarrow a > -\frac{2}{5}$$

Из условия выше $5a + 2 > 0 \Rightarrow D = (3a^2 - a + 4)^2 + 4 \cdot (5a + 2) > 0$ (квадрат + что-то положительное). Значит, $a > -\frac{2}{5}$ и есть ответ.

6. Числа x, y, a таковы, что

$$\begin{cases} x + 1 = a + y \\ xy + a^2 + 14 - 7a = 0 \end{cases}$$

При каких значениях a сумма $x^2 + y^2$ максимальна?

Ответ

$a = 5$

Решение

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x - y = a - 1 \\ -yx = a^2 - 7a + 14 \end{cases}$$

По обратной теореме Виета, если существуют числа x и $-y$, удовлетворяющие системе, то эти числа являются корнями уравнения

$$t^2 - (a - 1)t + (a^2 - 7a + 14) = 0$$

Чтобы было, что максимизировать, система должна иметь решение, значит, $D = (a-1)^2 - 4(a^2 - 7a + 14) \geqslant 0$, откуда $\frac{11}{3} \leqslant a \leqslant 5$.

Распишем сумму квадратов

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = (a - 1)^2 - 2(a^2 - 7a + 14) = -(a - 6)^2 + 9 \leqslant 9$$

Максимальное значение равно 9 и достигается при $a = 6$, но при этом значении параметра a дискриминант $D < 0$.

$y = -(a - 6)^2 + 9$ — парабола с ветвями вниз, $a = 6$ — ее точка максимума, а значит и координата ее оси симметрии. Тогда значениям $\frac{11}{3} \leqslant a \leqslant 5$ соответствует левая ветвь параболы $y = -(a - 6)^2 + 9$, следовательно, на данном промежутке функция возрастает, и наибольшее значение достигается при $a = 5$.

7. (*ЕГЭ 2020*) Найдите все a, при которых уравнение

$$x^4 \sin a + 2x^2 \cos a + \sin a = 0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ

$a = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Решение

Сделаем замену $t = x^2$. Заметим, что каждому $t > 0$ соответствует два значения x, $t = 0$ одно значение x, а при $t \leqslant 0$ уравнение замены не имеет решений относительно x. Запишем уравнение после замены.

$$t^2 \sin a + 2t \cos a + \sin a = 0$$

1. Отдельно рассмотрим случай, когда $\sin a = 0$. Получим уравнение $2t \cos a = 0$, оно имеет единственное решение $t = 0$, т.к. $\cos a \neq 0$. Тогда и исходное уравнение имеет лишь одно решение, значит, этот случай нам не подходит.

2. $\sin a \neq 0$, имеем квадратное уравнение. Исходное уравнение будет иметь два различных решения, когда уравнение от t имеет корни, причем ровно один из них положителен, а второй либо отсутствует, либо строго отрицателен. Преобразуем уравнение, поделив на $\sin a \neq 0$

$$t^2 + 2t \operatorname{ctg} a + 1 = 0, \quad D = 4 \operatorname{ctg}^2 a - 4$$

Рассмотрим две подходящие ситуации:

2.1. $D = 0,\ t_0 > 0$ (в данном случае корень совпадает с координатой вершины параболы)

$$\left.\begin{aligned} &t_0 = t_{\text{верш}} = -\tfrac{2 \operatorname{ctg} a}{2} = -\operatorname{ctg} a > 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} a < 0 \\ &D = 4 \operatorname{ctg}^2 a - 4 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} a = \pm 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{ctg} a = -1 \Rightarrow a = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2.2. $D > 0,\ t_1 < 0 < t_2$ (будем считать, что t_2 — больший корень)

По теореме Виета $t_1 \cdot t_2 = 1 \Rightarrow$ корни должны быть одного знака, что противоречит условиям этого случая.

1.3 Переход к системе

8. Найдите все a, при которых уравнения

$$x^2 + 2x + a = 17 \quad \text{и} \quad x^2 + 5x = 3a + 18$$

имеют хотя бы один общий корень.

Ответ

$a = -\frac{73}{16}; 2$

Решение

Пусть при некотором $a = a_0$ данные уравнения действительно имеют общий корень. Тогда ясно, что система

$$\begin{cases} x^2 + 2x + a = 17 \\ x^2 + 5x = 3a + 18 \end{cases}$$

будет иметь решение $(a_0; x_0)$. Также и в обратную сторону, если система имеет решение $(a_0; x_0)$, то при $a = a_0$ у двух исходных уравнений будет общий корень x_0. Решим систему, чтобы найти все такие a_0.

$$\begin{cases} x^2 + 2x = -a + 17 \\ x^2 + 5x = 3a + 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 \cdot (1) : 4x^2 + 8x = -4a + 17 \cdot 4 \\ (2) - (1) : 3x = 4a + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 + 8x + 4a - 17 \cdot 4 = 0 \\ 4a = 3x - 1 \end{cases}$$

$$4x^2 + 11x - 69 = 0$$

$$x_{1,2} = 3; -\frac{23}{4}$$

$$a_1 = \frac{3x_1 - 1}{4} = 2$$

$$a_2 = \frac{3x_2 - 1}{4} = -\frac{73}{16}$$

11. (*ЕГЭ 2020*) Найдите все a, при которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ

$a \in \mathbb{R} \backslash \{-6; -3; 0; 3; 6\}$

Решение

Заметим, что количество корней данного уравнения не превосходит количества корней числителя. Корни числителя $\pm\frac{a}{3}$, причем при $a = 0$ они совпадают, и исходное уравнение точно имеет не более одного решения, то есть $a = 0$ нам заведомо не подходит.

Также нам не подходят все a, при которых числитель и знаменатель имеют хотя бы один общий корень (тогда исходное имеет меньше двух решений). Чтобы найти такие a, перейдем к системе по аналогии с предыдущей задачей.

$$\begin{cases} 9x^2 - a^2 = 0 \\ x^2 + 8x + 16 - a^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{a}{3} \\ x = -\frac{a}{3} \end{array}\right. \\ (x+4)^2 = a^2 \end{cases}$$

$(x+4)^2 = 9x^2$

$8x^2 - 8x - 16 = 0$

$x = 2; -1$

$a = \pm 3; \pm 6$ (нам неважны конкретные пары решений)

Все a, кроме найденных, нам подойдут.

45. (*ЕГЭ 2017*) Найдите все a, при которых уравнение

$$\sqrt{4x-3} \cdot \ln(2x-a) = \sqrt{4x-3} \cdot \ln(3x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

Ответ

$a \in \left(-\frac{9}{4}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{3}{8}; \frac{3}{2}\right)$

Решение

Преобразуем

$$\sqrt{4x-3} \cdot (\ln(2x-a) - \ln(3x+a)) = 0$$

Выражение слева обращается в 0, когда один из множителей равен 0, а второй не теряет смысла. Запишем это в виде совокупности.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x - 3 = 0 \\ 2x - a > 0 \\ 3x + a > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - a = 3x + a \\ 2x - a > 0 \\ 4x - 3 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = \frac{3}{4} \\ 2x - a > 0 \\ 3x + a > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = -2a \\ 2x - a > 0 \\ 4x - 3 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Нас интересует только ситуация на промежутке $[0; 1]$, что происходит в остальных случаях нам вообще неважно, поэтому добавим соответствующее условие (в первой системе оно ненужно, т.к. x_1 и так лежит в промежутке $[0;1]$).

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x_1=\frac{3}{4}\\ 2x-a>0\\ 3x+a>0\end{cases}\\ &\begin{cases}x_2=-2a\\ 2x-a>0\\ 4x-3\geqslant 0\\ x\in[0;1]\end{cases}\end{aligned}\right.$$

Теперь решение задачи эквивалентно нахождению таких a, при которых совокупность имеет ровно 1 решение. Ясно, что каждая из двух внутренних систем имеет не более одного решения. Тогда нам могут подойти три случая:

первая система имеет одно решение, вторая система не имеет решений;

первая система не имеет решений, вторая система имеет одно решение;

обе системы имеют одно решение, и эти решения совпадают.

Найдем a, при которых первая система имеет ровно одно решение. Для этого подставим в условия первой системы $x=\frac{3}{4}$ и решим относительно a.

$$\begin{cases}2\cdot\frac{3}{4}-a>0\\ 3\cdot\frac{3}{4}+a>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<\frac{3}{2}\\ a>-\frac{9}{4}\end{cases}\Rightarrow a\in\left(-\frac{9}{4};\frac{3}{2}\right)$$

Аналогично для второй системы

$$\begin{cases}2\cdot(-2a)-a>0\\ 4\cdot(-2a)-3\geqslant 0\\ -2a\in[0;1]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<0\\ a\leqslant-\frac{3}{8}\\ a\in\left[-\frac{1}{2};0\right]\end{cases}\Rightarrow a\in\left[-\frac{1}{2};-\frac{3}{8}\right]$$

1. Первая система имеет одно решение, вторая система не имеет решений.

$$a\in\left(-\frac{9}{4};\frac{3}{2}\right)\setminus\left[-\frac{1}{2};-\frac{3}{8}\right]\Rightarrow a\in\left(-\frac{9}{4};-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{8};\frac{3}{2}\right)$$

2. Первая система не имеет решений, вторая система имеет одно решение.

$$a\in\left[-\frac{1}{2};-\frac{3}{8}\right]\setminus\left(-\frac{9}{4};\frac{3}{2}\right)\Rightarrow a\in\varnothing$$

3. Обе системы имеют одно решение, и эти решения совпадают.

$$\frac{3}{4}=-2a\Rightarrow a=-\frac{3}{8}$$

$a=-\frac{3}{8}$ удовлетворяет обеим системам, значит, это a подходит. Объединив ответы, получим

$$a\in\left(-\frac{9}{4};-\frac{1}{2}\right)\cup\left[-\frac{3}{8};\frac{3}{2}\right)$$

1.4 Свойства квадратичных функций

12. При каких a один корень уравнения

$$x^2 + ax + 4 = 0$$

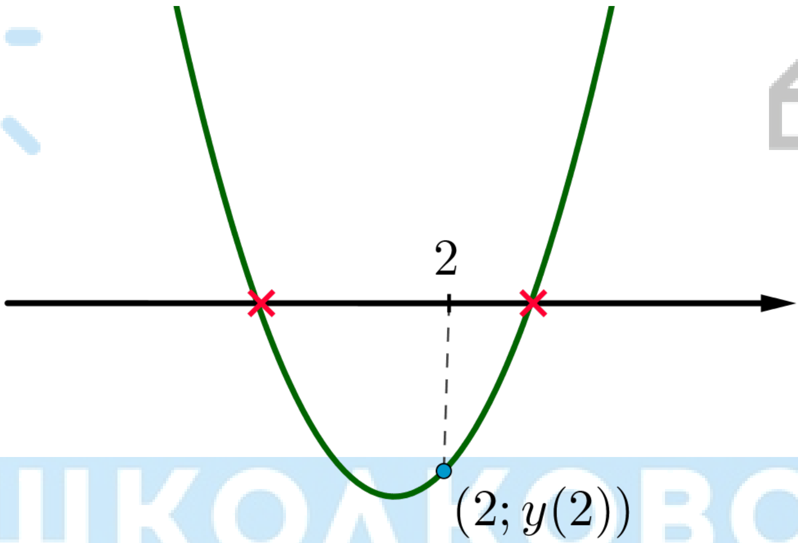
меньше 2, а другой больше 2?

Ответ

$a \in (-\infty; -4)$

Решение

Рассмотрим функцию $y = x^2 + ax + 4$. Графиком является парабола с ветвями вверх. Чтобы оба корня находились по разные стороны от числа 2, картинка должна иметь следующий вид



Всего существует пять мест, куда можно поставить число 2 относительно корней уравнения: слева направо I, II, III, IV, V. Нам подходит лишь III. В этом месте значение функции во всех точках отрицательное. И это единственное место, где значение функции отрицательное. Это эквивалентно системе

$$\begin{cases} D = a^2 - 16 \geqslant 0 \\ y(2) < 0 \end{cases}$$

Заметим, что условие на дискриминант в данной случае необязательно, так как если есть хотя бы одна точка, где значение функции отрицательно для параболы с ветвями вверх, то мы автоматически имеем два корня.

Решая систему выше, получаем $a \in (-\infty; -4)$.

Расшифровка:

I — до левого корня,

II — в левом корне,

III — между корнями,

IV — в правом корне,

V — правее правого корня.

13. При каких a уравнение

$$x^2 + 2(a-2)x - 4a + 5 = 0$$

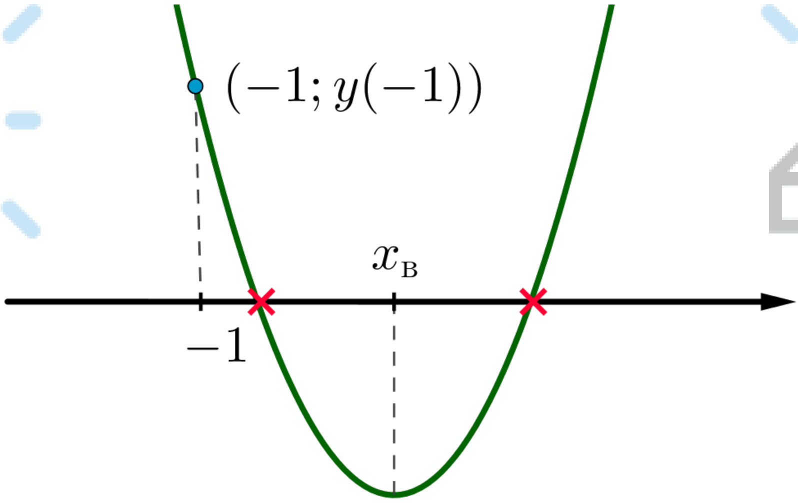
имеет два различных корня, причем оба больше -1?

Ответ

$a \in (-\infty; -1) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right)$

Решение

Рассмотрим функцию $y = x^2 + 2(a-2)x - 4a + 5$. Графиком является парабола с ветвями вверх. Чтобы оба корня были больше -1, картинка должна иметь следующий вид



Всего существует пять мест, куда можно поставить число -1 относительно корней уравнения: слева направо I, II, III, IV, V. Нам подходит лишь I. В этом месте значение функции во всех точках положительное. Но так как в V месте значение функции во всех точках тоже положительное, дополнительно накладывается условие на абсциссу вершины параболы: что она больше -1.

$$\begin{cases} D = 4(a-2)^2 - 2(5-4a) \geqslant 0 \\ y(-1) > 0 \\ x_{\text{в}} > -1 \end{cases}$$

Решая систему выше, получаем $a \in (-\infty; -1) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right)$.

Расшифровка:

I — *до левого корня,*

II — *в левом корне,*

III — *между корнями,*

IV — *в правом корне,*

V — *правее правого корня.*

17. (*ЕГЭ, 2019*) Найдите все a, при которых уравнение

$$\frac{x^2 - a(a-1)x - a^3}{\sqrt{3+2x-x^2}} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ

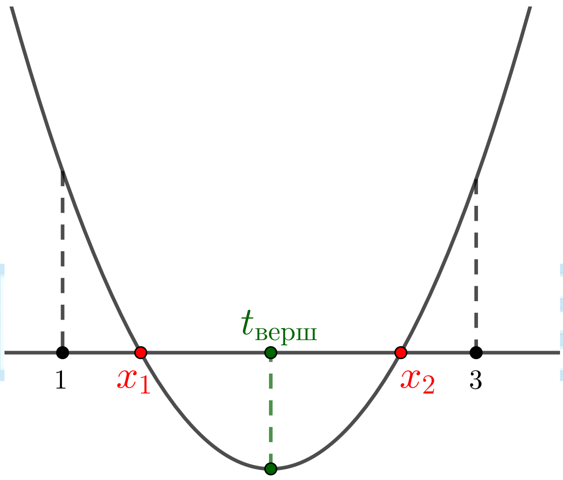
$a \in \left(-\sqrt{3}; 1\right) \setminus \{-1; 0\}$

Решение

Чтобы данное уравнение имело два различных решения, числитель должен иметь два различных корня, удовлетворяющих ОДЗ знаменателя. Найдем ОДЗ знаменателя.

$$3 + 2x - x^2 \geqslant 0 \Rightarrow -1 < x < 3$$

Пусть $f(x) = x^2 - a(a-1)x - a^3$. Тогда f — парабола с ветвями вверх. f должна иметь два пересечения с осью абсцисс, которые удовлетворяют условию выше.



То есть значения f в точках 1 и 3 должны быть положительными, причем координата по x оси параболы должна находиться между 1 и 3 (без этого условия обе точки могли оказаться по одну сторону от параболы). Запишем это в виде системы.

$$\begin{cases} D > 0 \\ f(-1) > 0 \\ f(3) > 0 \\ -1 < x_{\text{в}} < 3 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2(a-1)^2 + 4a^3 > 0 \\ 1 + a^2 - a - a^3 > 0 \\ 9 - 3a(a-1) - a^3 > 0 \\ -1 < \frac{a(a-1)}{2} < 3 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2(a^2 + 2a + 1) > 0 \\ (1-a) + a^2(1-a) > 0 \\ 3(3+a) - a^2(3+a) > 0 \\ a^2 - a - 6 < 0 \\ a^2 - a + 2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2(a+1)^2 > 0 \\ (a^2+1)(a-1) < 0 \\ (a^2-3)(a+3) < 0 \\ (a+2)(a-3) < 0 \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

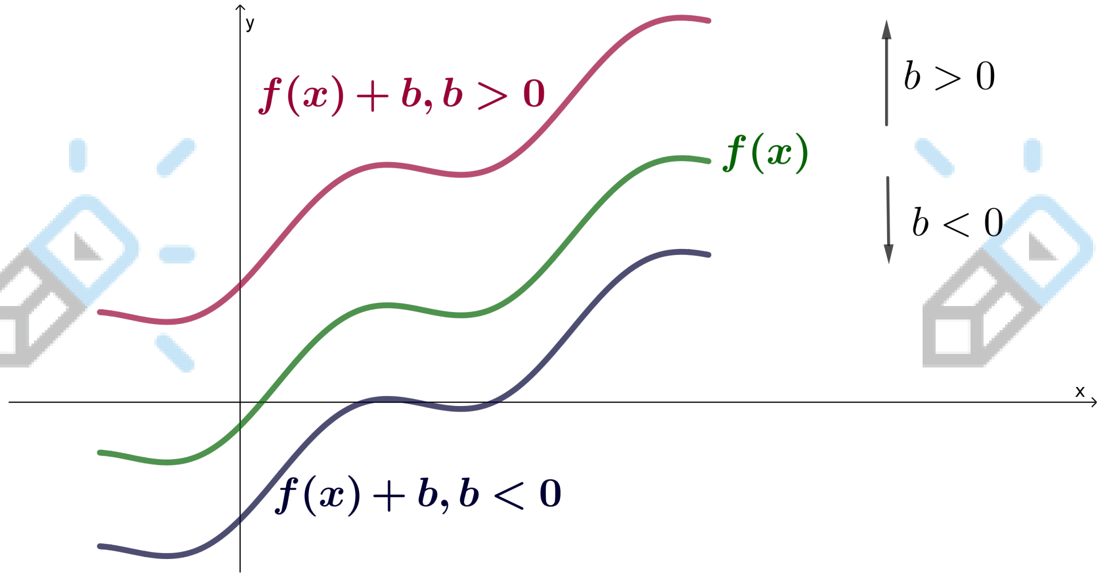
$$\begin{cases} a \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\} \\ a < 1 \\ a \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 3) \\ a \in (-2; 3) \end{cases}$$

Объединив, получим ответ $a \in \left(-\sqrt{3}; 1\right) \setminus \{-1; 0\}$.

2 Раунд 2

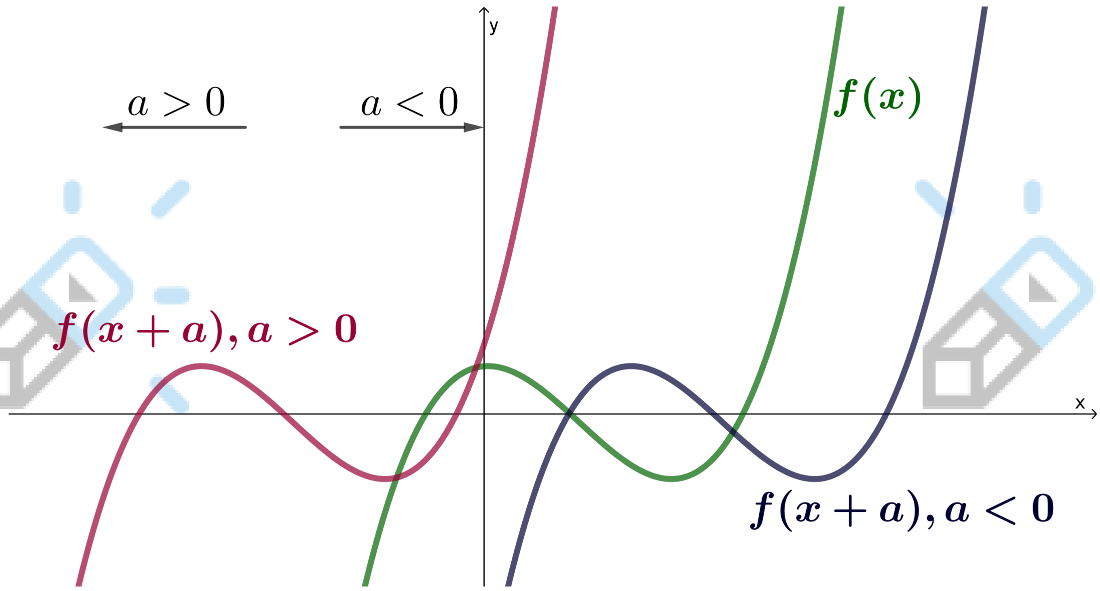
2.1 Основные свойства построения графиков

• График функции $f(x) + b$ получается из графика функции $f(x)$ путем поднятия на b единиц вверх по оси Oy, если $b > 0$, и опускания на $|b|$ единиц вниз по оси Oy, если $b < 0$.



Пример. *Чтобы построить график функции* $y = x^2 + 2$, *нужно параболу* $y = x^2$ *поднять на 2 единицы вверх. Чтобы построить график функции* $y = \sin x - 3$, *нужно синусоиду* $y = \sin x$ *опустить на 3 единицы вниз.*

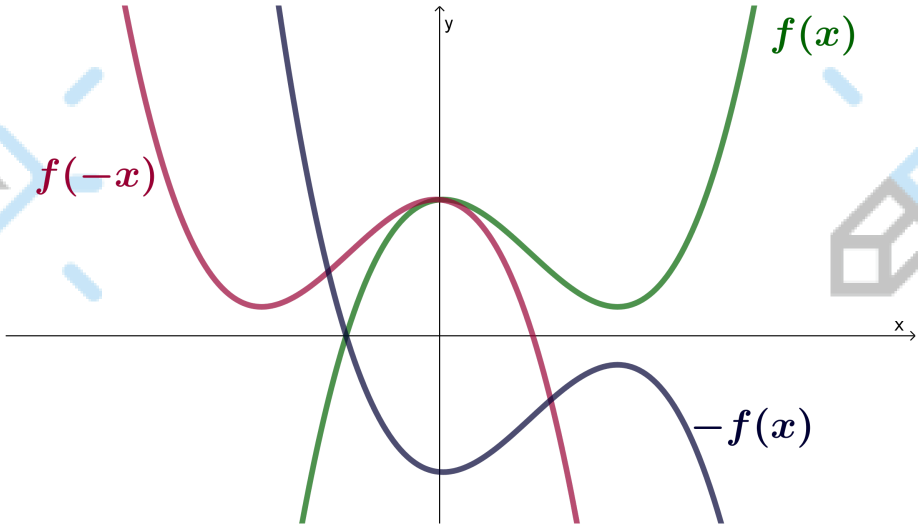
• График функции $f(x + a)$ получается из графика функции $f(x)$ путем сдвига на a единиц влево по оси Ox, если $a > 0$, и сдвига на $|a|$ единиц вправо по оси Ox, если $a < 0$.



Таким образом, число точек пересечения графика функции $f(x + a)$ будет таким же, как и у графика $f(x)$.

Пример. Чтобы построить график функции $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$, *нужно график функции* $y = \cos x$ *сдвинуть на* $\frac{\pi}{5}$ *единиц влево. Чтобы построить график функции* $y = (x-5)^5$, *нужно график функции* $y = x^5$ *сдвинуть на* 5 *единиц вправо.*

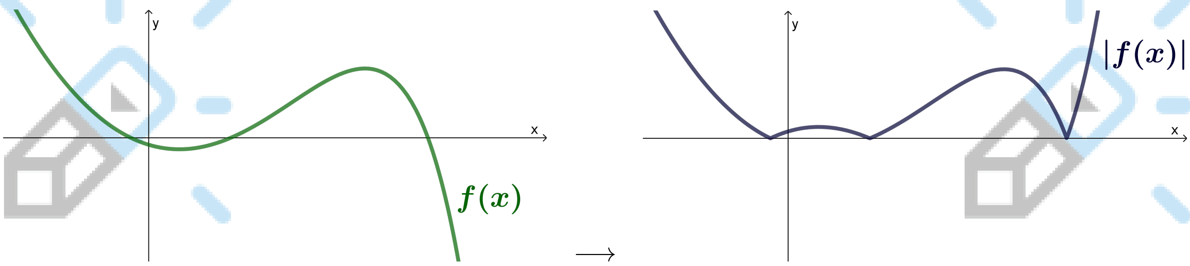
• График функции $-f(x)$ получается из графика функции $f(x)$ отражения симметрично относительно оси Ox. График функции $f(-x)$ получается из графика функции $f(x)$ путем отражения симметрично относительно оси Oy.

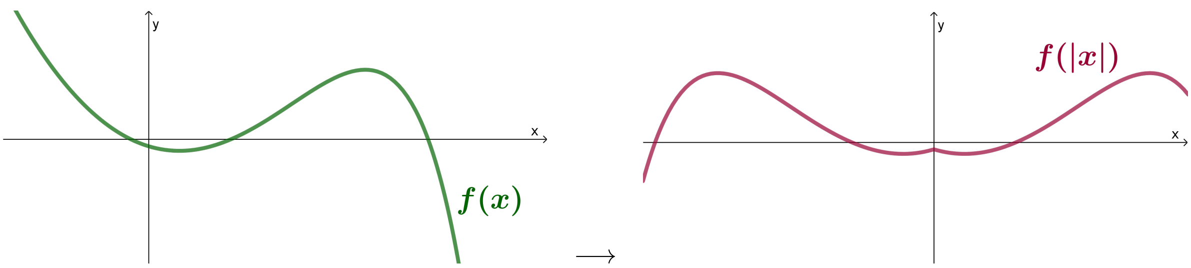


Соответственно график $-f(x)$ пересекает ось Ox в тех же точках, что и график $f(x)$. График $f(-x)$ пересекает ось Oy в тех же точках, что и график $f(x)$.

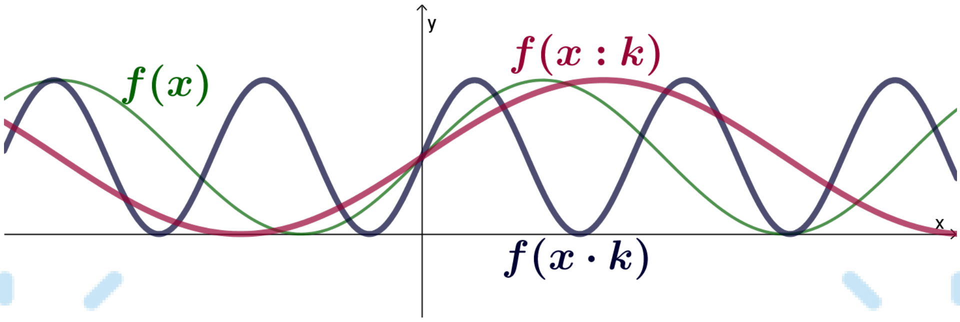
Пример. Чтобы построить график функции $y = -x^2$, *нужно параболу* $y = x^2$ *отразить симметрично относительно оси* Ox. *Чтобы построить график* $y = \ln(-x)$, *нужно график* $y = \ln x$ *отразить симметрично относительно оси* Oy.

• График функции $|f(x)|$ получается из графика функции $f(x)$ отражением той части графика, что находится ниже оси Ox, симметрично относительно оси Ox. График функции $f(|x|)$ получается из графика функции $f(x)$ путем отражения той части графика, что находится правее оси Oy, симметрично относительно оси Oy.



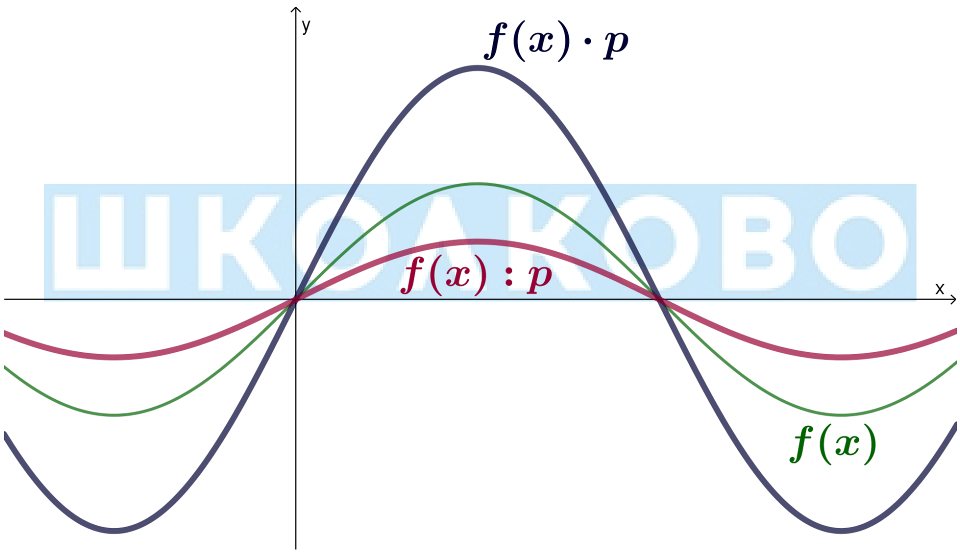


• График функции $f(x{\cdot}k)$ получается из графика функции $f(x)$ путем сжатия его в k раз к оси Oy, если $k > 1$. График функции $f(x : k)$ получается из графика функции $f(x)$ путем растяжения в k раз от оси Oy, если $k > 1$.



В таком случае область значений функции $f(x \cdot k)$, как и $f(x : k)$, остается такой же, как и у функции $f(x)$. Точки пересечения графиков с осью Oy также остаются неизменными.

• График функции $f(x){\cdot}p$ получается из графика функции $f(x)$ путем растяжения его в p раз от оси Ox, если $p > 1$. График функции $f(x) : p$ получается из графика функции $f(x)$ путем сжатия в p раз к оси Ox, если $p > 1$.



В таком случае область определения функции $f(x \cdot k)$, как и $f(x : k)$, остается такой же, как и у функции $f(x)$. Точки пересечения графиков с осью Ox остаются неизменными.

Как построить график функции $p \cdot f(kx+a)+b$, базируясь на функции $f(x)$?

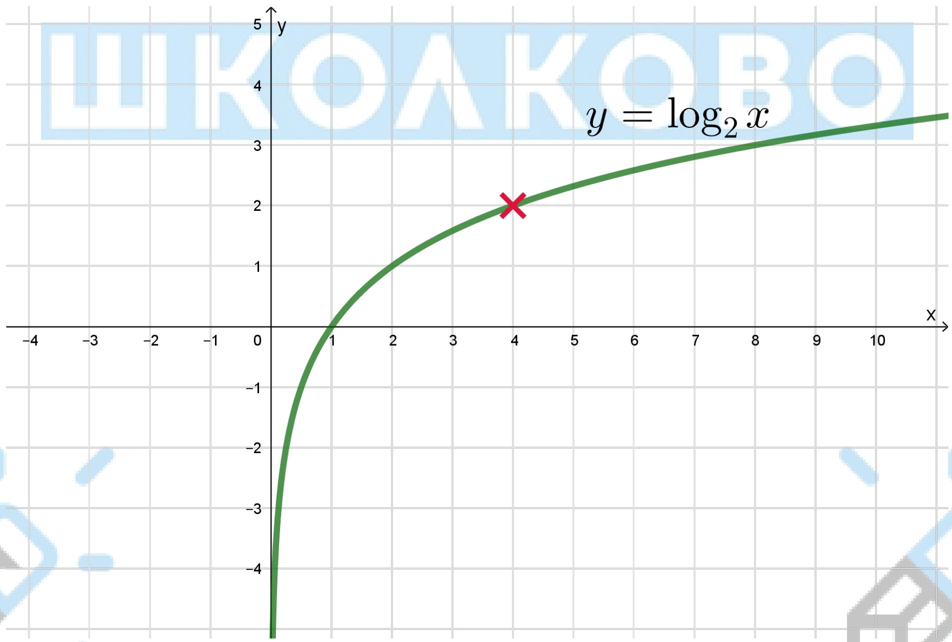
1) Выполняем все преобразования, связанные с **аргументом**: сначала делаем сложение, то есть сдвигаем график вправо/влево на $|a|$ по оси Ox. Получаем график $f(x+a)$. Затем делаем умножение на k, то есть сжимаем/растягиваем график к/от оси Oy. Получаем график функции $f(kx+a)$).

2) Выполняем все преобразования, связанные с **функцией**. Сначала делаем умножение на p, то есть сжимаем/растягиваем график к/от оси Ox. Получаем график $p \cdot f(kx+a)$. Затем делаем сложение, то есть сдвигаем график вверх/вниз по оси Oy. Получаем график функции $p \cdot f(kx+a)+b$.

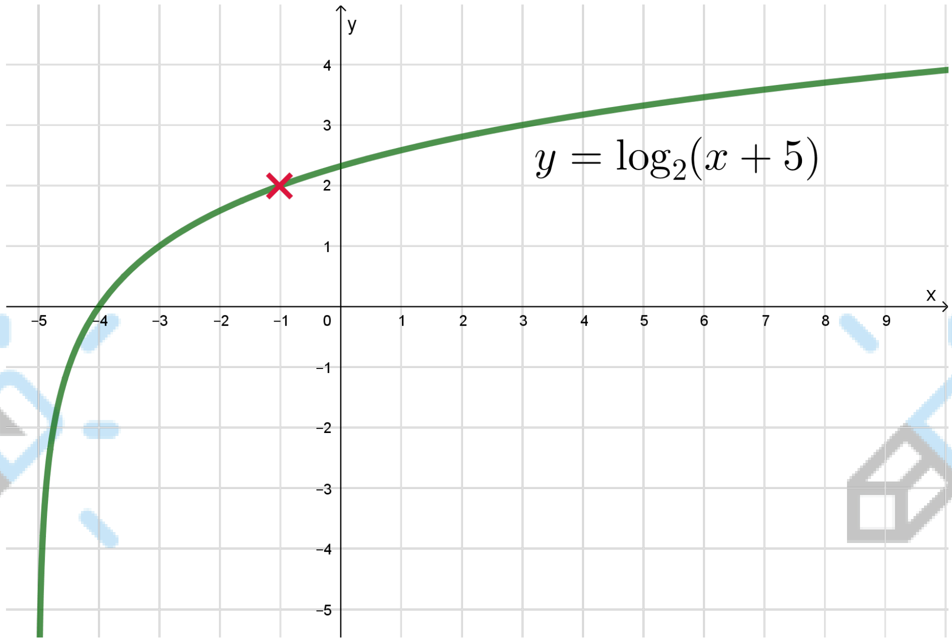
Заметим, что все действия с аргументом "цепляются" именно к переменной x! Соответственно, если вы хотите получить, например, в аргументе $-2|x|+1$, то нужно сделать сначала $x+1$ (сдвинуть на 1 влево по Ox), затем $2x+1$ (уменьшить координаты x всех точек в 2 раза), затем $2\cdot(-x)+1=-2x+1$ (отразить график симметрично относительно Oy), затем $-2|x|+1$ (отразить часть графика, находящую правее Oy, симметрично относительно Oy).

Как и в начальной математике, в первую очередь делаются действия в скобках, затем умножение, затем сложение. Поэтому сначала делаем действия с аргументом (он в скобках). Затем переходим к функции.

Пример. Построить график функции $y=-\frac{1}{2}\log_2(2x+5)+4$.
Будем строить график этой функции, опираясь на функцию $y=\log_2 x$.

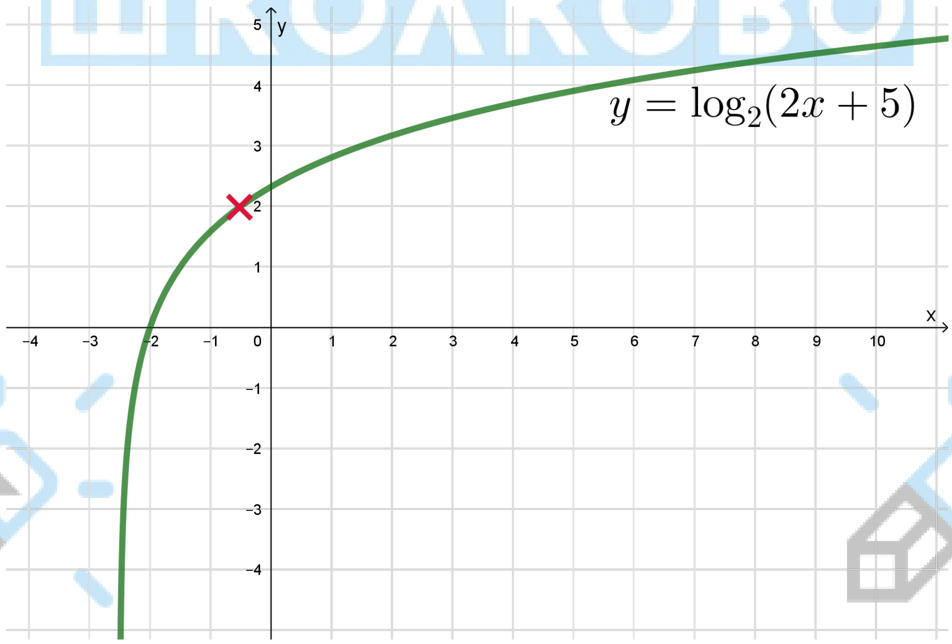


1) Строим график функции $y = \log_2(x+5)$. Сдвигаем график на 5 единиц влево по оси Ox:



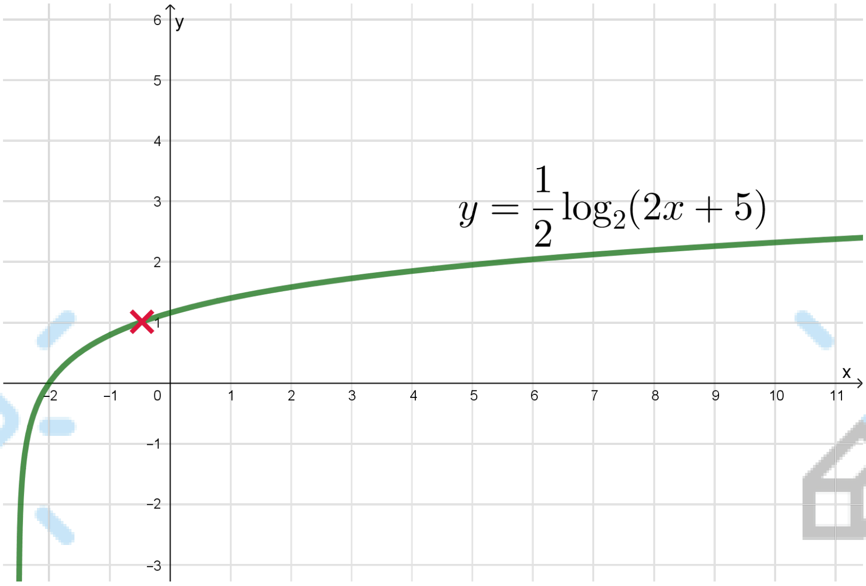
Как это делать: фиксируем несколько точек. Не меняя у этих точек координату y, уменьшаем координату x на 5. Таким образом, если график $y = \log_2(x)$ проходил через точку $(4; 2)$, то график $y = \log_2(x+5)$ будет проходить через точку $(4-5; 2) = (-1; 2)$.

2) Строим график функции $y = \log_2(2x+5)$. Сжимаем график $y = \log_2(x+5)$ в 2 раза к оси Oy:



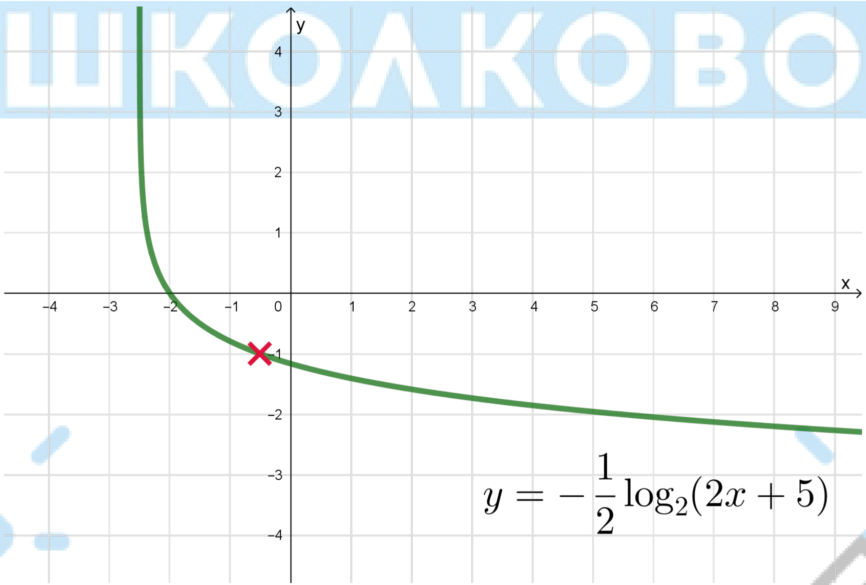
Как это делать: фиксируем несколько точек. Не меняя у этих точек координату y, уменьшаем координату x в 2 раза. Таким образом, если график $y = \log_2(x+5)$ проходил через точку $(-1; 2)$, то график $y = \log_2(2x+5)$ будет проходить через точку $(-1:2; 2) = (-0,5; 2)$.

3) Строим график функции $y = \frac{1}{2}\log_2(2x+5)$. Сжимаем предыдущий график в 2 раза к оси Ox:



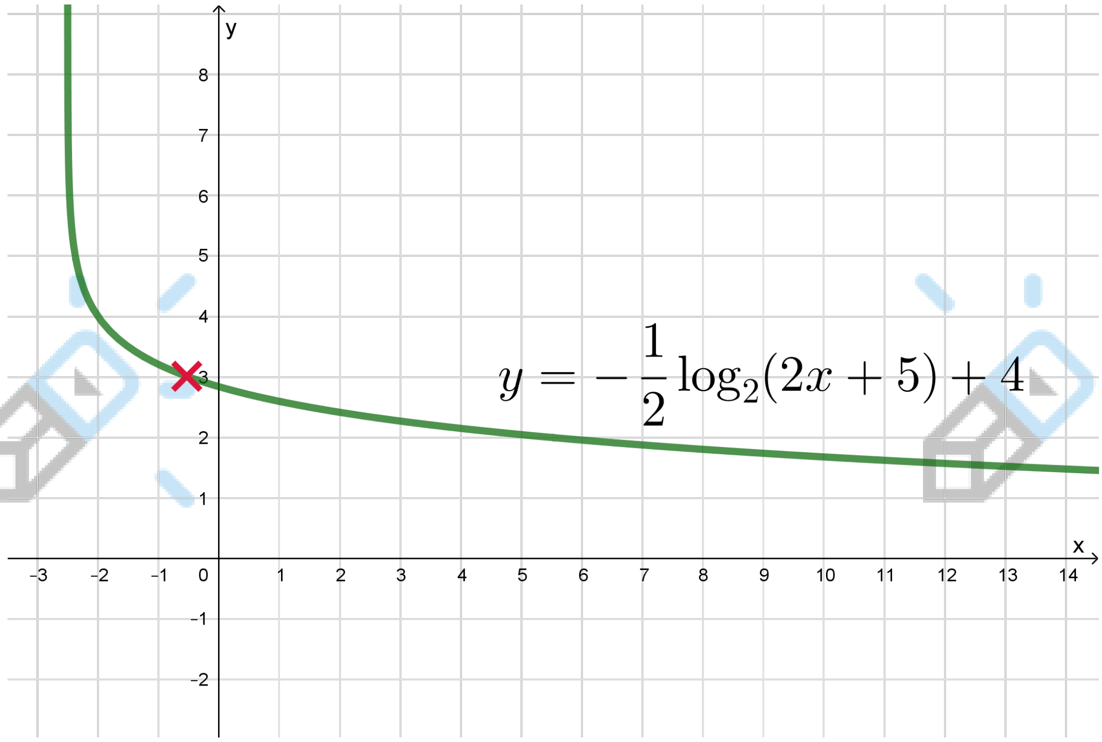
Как это делать: фиксируем несколько точек. Не меняя у этих точек координату x, уменьшаем координату y в 2 раза. Таким образом, если график $y = \log_2(2x+5)$ проходил через точку $(-0,5;2)$, то график $y = \frac{1}{2}\log_2(2x+5)$ будет проходить через точку $(-0,5;2:2) = (-0,5;1)$.

4) Строим график функции $y = -\frac{1}{2}\log_2(2x+5)$. Отражаем предыдущий график относительно оси Ox.



Как это делать: фиксируем несколько точек. Не меняя у этих точек координату x, координату y умножаем на -1. Таким образом, если график $y = \frac{1}{2}\log_2(2x+5)$ проходил через точку $(-0,5;1)$, то график $y = -\frac{1}{2}\log_2(2x+5)$ будет проходить через точку $(-0,5;-1)$.

5) Строим график функции $y = -\frac{1}{2}\log_2(2x+5)+4$. Поднимаем предыдущий график на 4 единицы вверх по оси Oy:

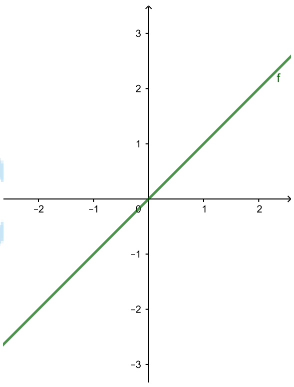


Как это делать: фиксируем несколько точек. Не меняя у этих точек координату x, координату y увеличиваем на 4. Таким образом, если график $y = -\frac{1}{2}\log_2(2x+5)$ проходил через точку $(-0,5;-1)$, то график $y = -\frac{1}{2}\log_2(2x+5)+4$ будет проходить через точку $(-0,5;-1+4) = (-0,5;3)$.

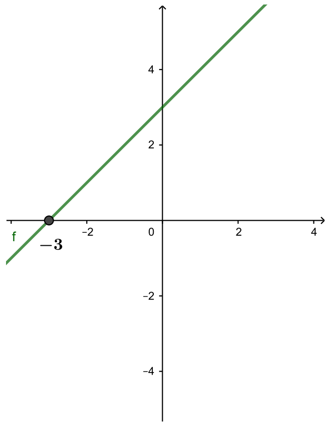
19.

(a) $y = -\frac{3-x}{2}$

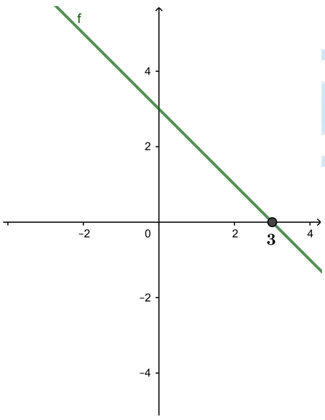
$y = x$



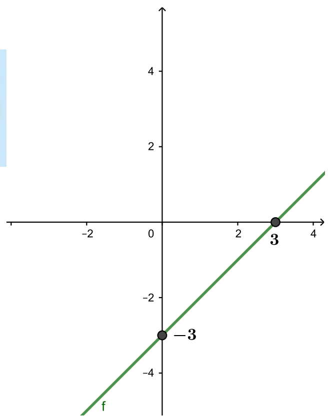
$y = x + 3 \quad (\leftarrow \text{ на } 3)$



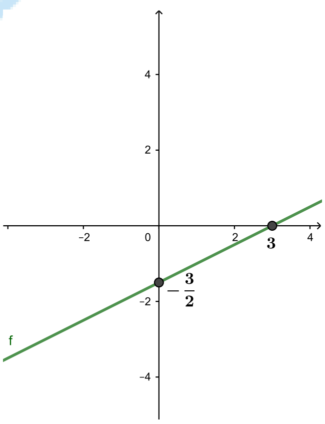
$y = -x + 3 \quad$ (симметрия относительно Oy)



$y = -(3 - x) \quad$ (симметрия относительно Ox)

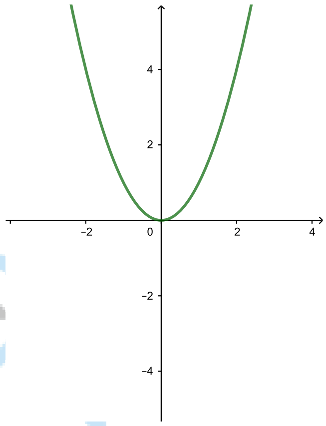


$y = -\dfrac{3-x}{2} \quad$ (сжатие вдвое вдоль Oy)

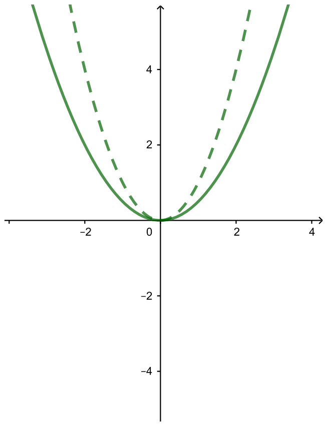


(c) $y = -\left|3 - \frac{1}{2}x^2\right|$

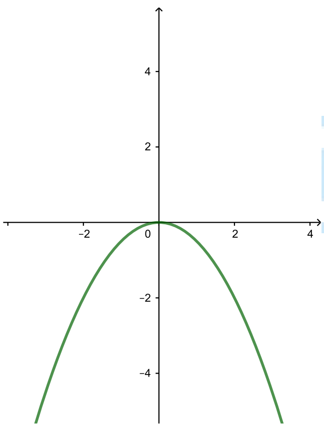
$y = x^2$



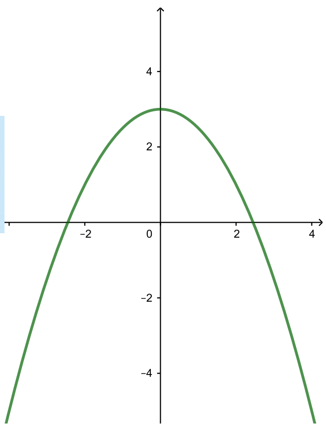
$y = \dfrac{1}{2}x^2$ (сжатие вдвое вдоль Oy)



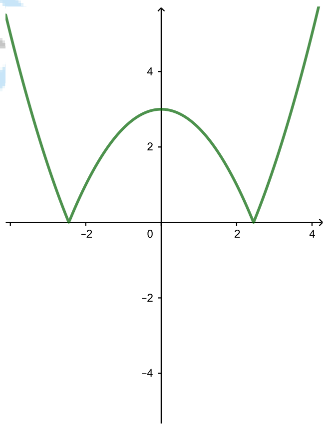
$y = -\dfrac{1}{2}x^2$ (симметрия относительно Ox)



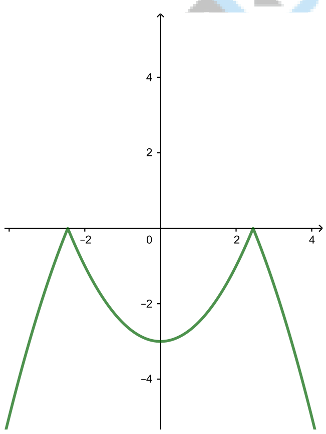
$y = 3 - \dfrac{1}{2}x^2$ ($\uparrow$ на 3)



$y = \left|3 - \dfrac{1}{2}x^2\right|$ (модуль функции)

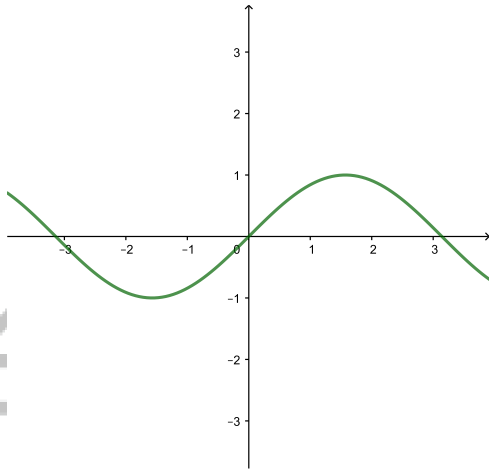


$y = -\left|3 - \dfrac{1}{2}x^2\right|$ (симметрия относительно Ox)

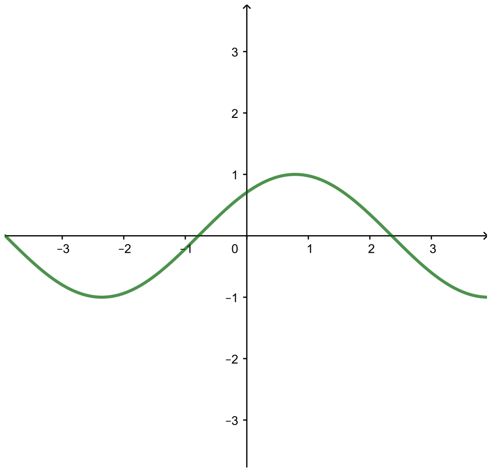


(d) $y = \sin\left(|x| + \frac{\pi}{4}\right) - 2$

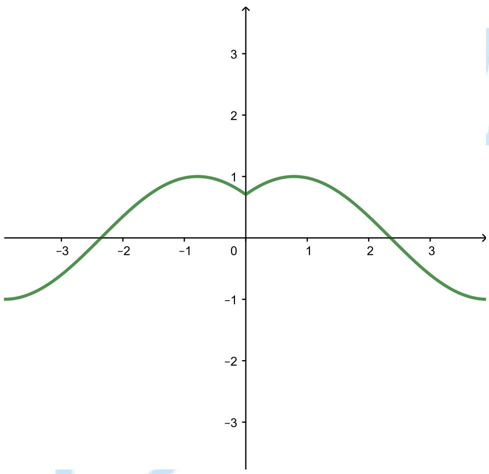
$y = \sin x$



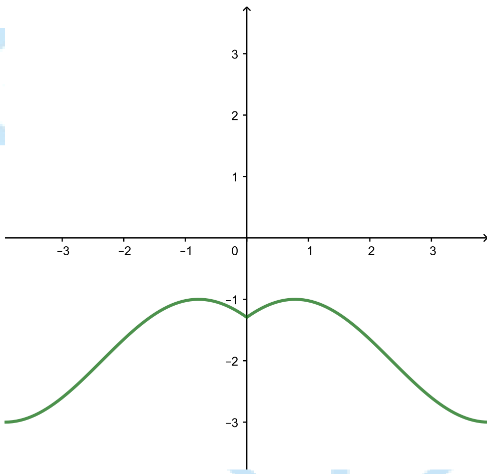
$y = \sin(x + \dfrac{\pi}{4}) \quad (\leftarrow \text{ на } \dfrac{\pi}{4})$



$y = \sin(|x| + \dfrac{\pi}{4}) \quad$ (модуль аргумента)



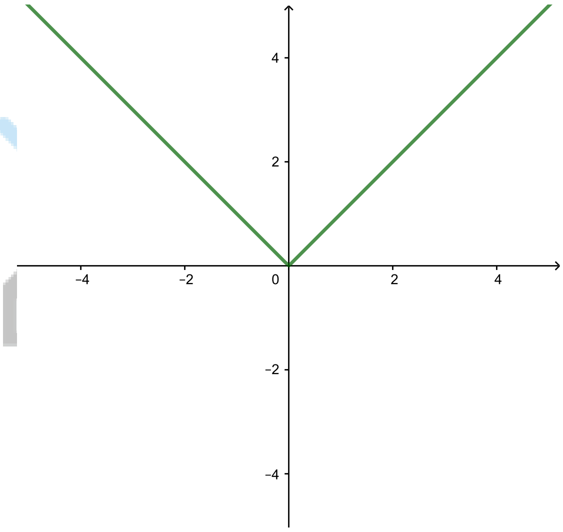
$y = \sin(|x| + \dfrac{\pi}{4}) - 2 \quad (\downarrow \text{ на } 2)$



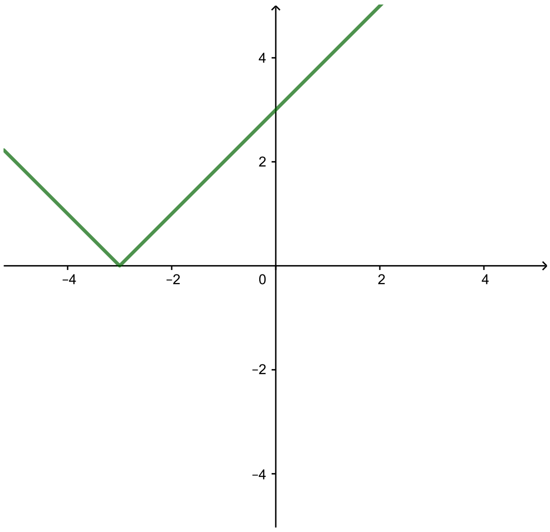
20.

(a) $y = 2|x+3| - a$

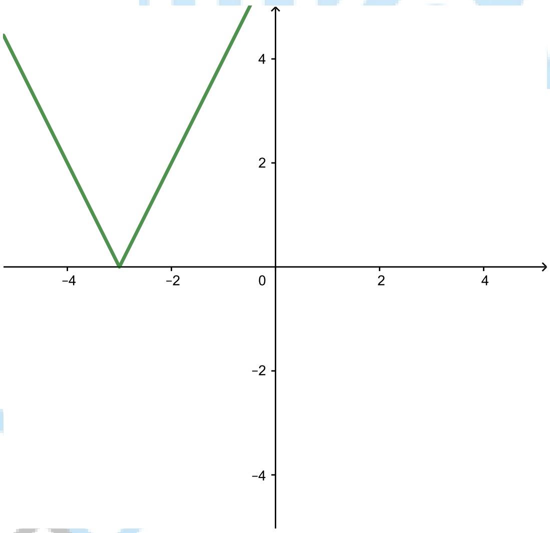
$y = |x|$



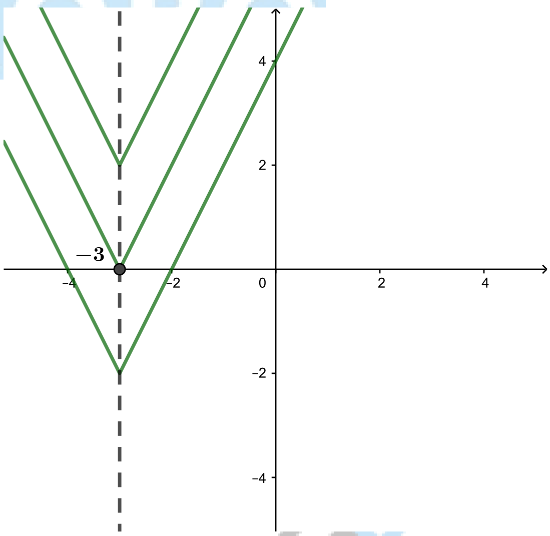
$y = |x+3| \quad (\leftarrow \text{ на } 3)$



$y = 2|x+3| \quad$ (растяжение вдвое вдоль Oy)



$y = \sin(|x| + \frac{\pi}{4}) - 2 \quad$ (сдвиг на a вдоль Oy)



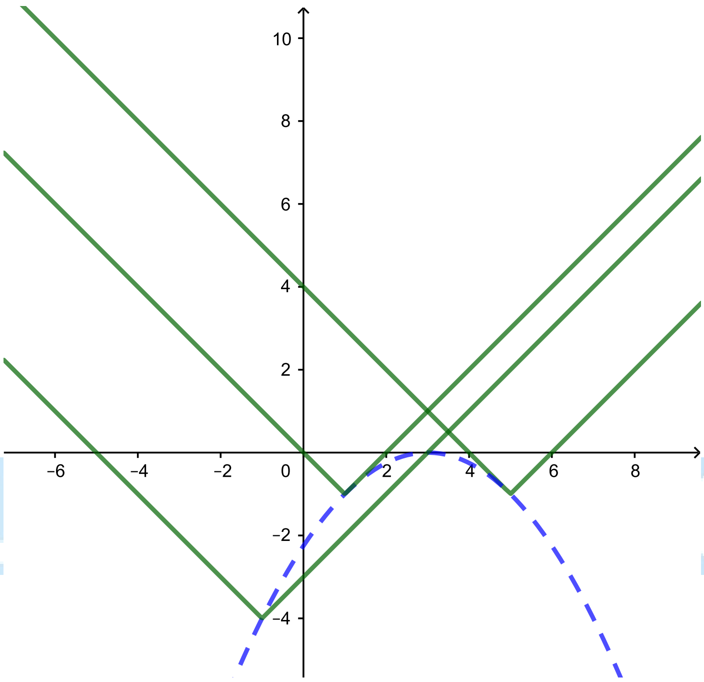
Получили общий вид семейства функций.

(c) $y = |2a - x + 3| - a^2$

Преобразуем: $y = |x - (2a + 3)| - a^2$. График такой функции это график $f(x) = |x|$, сдвинутый вправо на $2a + 3$ и вниз на a^2. Из этого следует, что координаты вершины исходной функции $(2a + 3; -a^2)$. Зададим это множество точек в виде системы

$$\begin{cases} x = 2a + 3 \Rightarrow a = \frac{x-3}{2} \\ y = -a^2 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{(x-3)^2}{4}$$

То есть множество точек, в которых может находиться вершина графика модуля, является парабола $y = -\frac{(x-3)^2}{4}$. Построим это семейство функций.



21.(d) $y = 3|5a - 3x + 9| - 2a = 9\left|x - \frac{5a+9}{3}\right| - 2a$

То есть наш график это график $f(x) = 9|x|$ с вершиной в точке $(\frac{5a+9}{3}; -2a)$. Найдем траекторию, на которой может находиться вершина.

$$\begin{cases} x = \frac{5a+9}{3} \\ y = -2a \Rightarrow a = -\frac{y}{2} \end{cases}$$

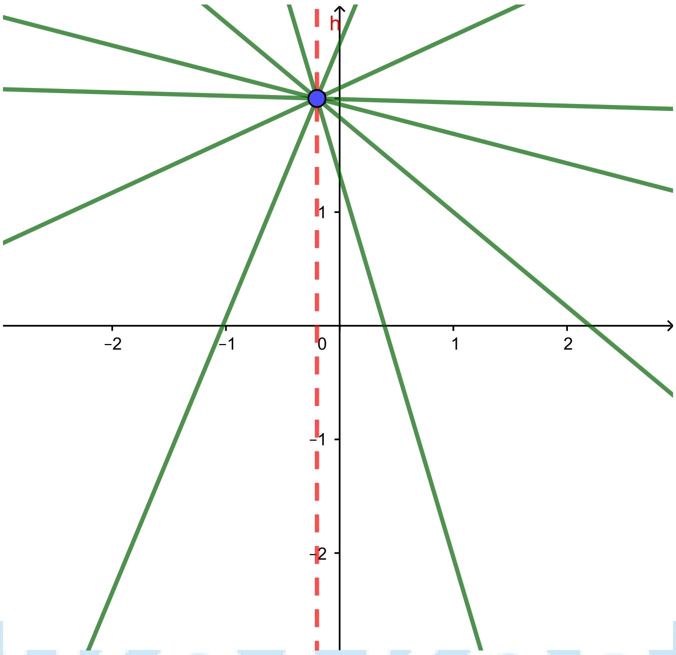
$$x = \frac{-\frac{5}{2}y + 9}{3}$$

$$3x - 9 = -\frac{5}{2}y$$

$y = \frac{18}{5} - \frac{6}{5}x$ — очевидно, что это прямая.

22.(a) $y = 5ax + 2 + a = 5a(x + \frac{1}{5}) + 2$

Видно, что график этой функции всегда проходит через точку $(-\frac{1}{5}; 2)$. Другими словами, если мы подставим $x = -\frac{1}{5}$, $y = 2$, то независимо от a левая часть будет тождественно равна правой. То есть семейство таких функций — это семейство прямых проходящих через точку $(-\frac{1}{5}; 2)$ с произвольными угловыми коэффициентами (т.к. a может быть любым), за исключением вертикальной прямой h (обозначена красным). Такое семейство называют пучком прямых.



23. Найдите значения a, при которых уравнение

$$|(2x-a)^2 - |x| - 28| + 2|x| = 16$$

имеет три различных решения.

Ответ

$a = \pm 10$

Решение

Преобразуем исходное

$$|(2x-a)^2 - |x| - 28| = 16 - 2|x|$$

Уравнение с модулем такого типа равносильно системе

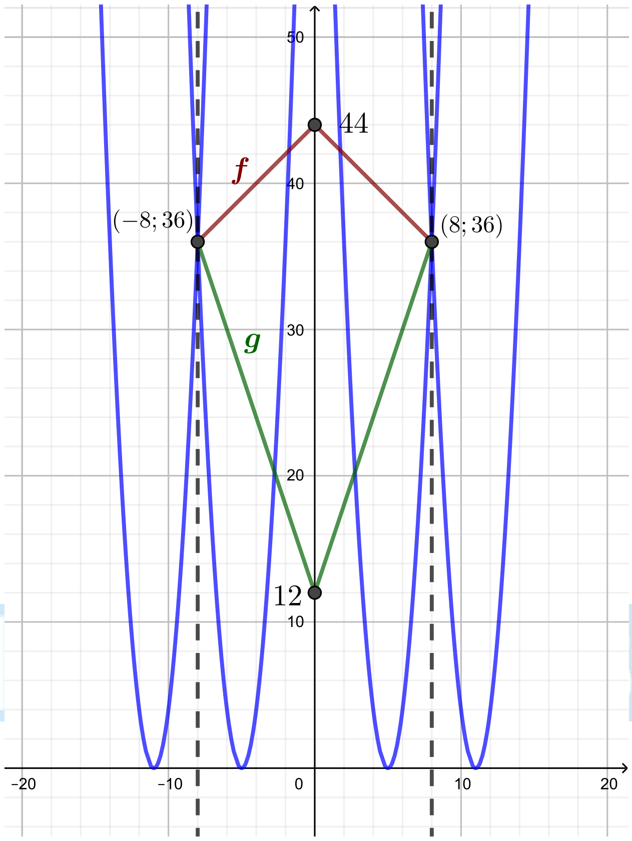
$$\begin{cases} 16 - 2|x| \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} (2x-a)^2 - |x| - 28 = 16 - 2|x| \\ (2x-a)^2 - |x| - 28 = 2|x| - 16 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8 \leqslant x \leqslant 8 \\ \left[\begin{array}{l} (2x-a)^2 = 44 - |x| \\ (2x-a)^2 = 3|x| + 12 \end{array}\right. \end{cases}$$

Обозначим $f(x) = 44 - |x|$, $g(x) = 3|x| + 12$ и $h(x) = (2x - a)^2$. Нам нужно найти a, при которых количество точек пересечений графика h с графиками f и g, удовлетворяющих условию $-8 \leqslant x \leqslant 8$ равно трем.

Графики f и g строятся элементарно, построим только интересующую нас их часть от -8 до 8. Несложно проверить, что они пересекаются как раз при $x = \pm 8$ в точках $(-8; 36)$ и $(8; 36)$.

Преобразуем $h(x) = (2x - a)^2 = 4\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$. Это парабола с единственным корнем $x = \frac{a}{2}$, которая произвольно перемещается вдоль оси абсцисс в зависимости от a. Рассмотрим четыре ее положения, мысленно пронумеруем их слева направо.



Найдем a, при которых h будет в изображенных положениях.

$$36 = 4(8 - \frac{a}{2})^2$$
$$\pm 3 = 8 - \frac{a}{2}$$
$$a = 10; 22$$

То есть третьему положению соответствует $a = 10$, четвертому — $a = 22$, первому — $a = -22$, второму — $a = -10$ (из симметрии).

Левее положения 1 и правее положения 4 h не имеет точек пересечения с f и g. Проверим, что в положении 3 (положение 2 симметрично) h пересекает ось Oy выше точки $(0; 44)$.

$$y = 4(0 - \frac{10}{5})^2 = 100$$

Тогда можем утверждать, что между положениями 1 и 2 точек пересечения две, в положении 2 — три, между положениями 2 и 3 — четыре, в положении 3 — три, правее 3 — менее трех. Нам подходят положения 2 и 3, им соответствуют $a = \pm 10$.

50. Найдите все a, при которых уравнение

$$a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$$

имеет единственное решение.

Ответ

$a \in [2; 3) \cup (3; 4]$

Решение

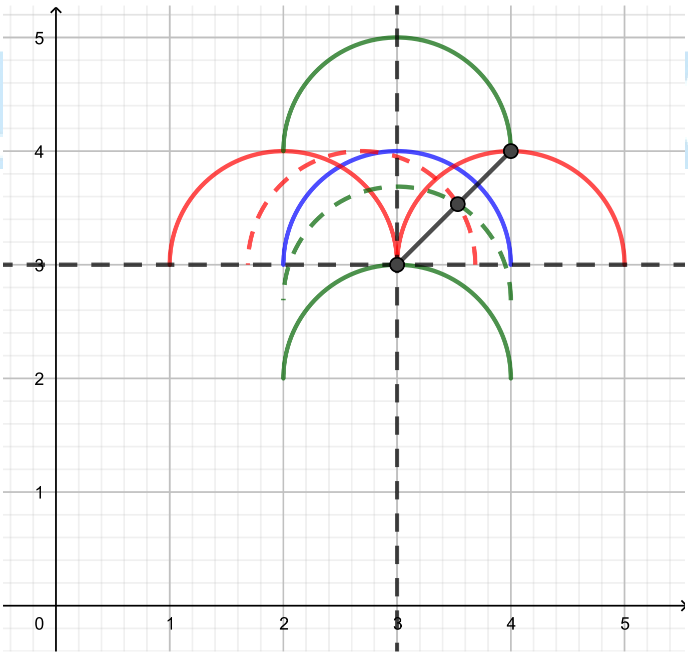
Обозначим y значение каждой из частей уравнения. Тогда оно эквивалентно системе

$$\begin{cases} y - a = \sqrt{6x - x^2 - 8} \\ y - 3 = \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-a)^2 + (x-3)^2 = 1, \quad y - a \geqslant 0 \\ (y-3)^2 + (x-a)^2 = 1, \quad y - 3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Первое — это полуокружность с центром $(3; a)$ и радиусом 1, лежащая не ниже прямой $y = a$. Центры всех таких полуокружностей лежат на прямой $x = 3$.

Второе — это полуокружность с центром $(a; 3)$ и радиусом 1, лежащая не ниже прямой $y = 3$. Центры всех таких полуокружностей лежат на прямой $y = 3$.



Синее положение достигается при $a = 3$, полуокружности совпадают. Увеличение a на Δ соответствует сдвигу одной полуокружности на Δ вверх, а другой вправо. При уменьшении a аналогично вниз и влево.

Крайние положения достигаются при сдвиге на -1 и $+1$ относительно $a = 3$, то есть при $a = 2$ и $a = 4$. В любом положении между крайними, кроме синего, будет одна точка пересечения. Действительно все такие точки пересечения будут лежать на отрезке между точками $(3; 3)$ и $(4; 4)$. Получаем $a \in [2; 3) \cup (3; 4]$.

28. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-4)^2=9\\ y=|x-a|+1\end{cases}$$

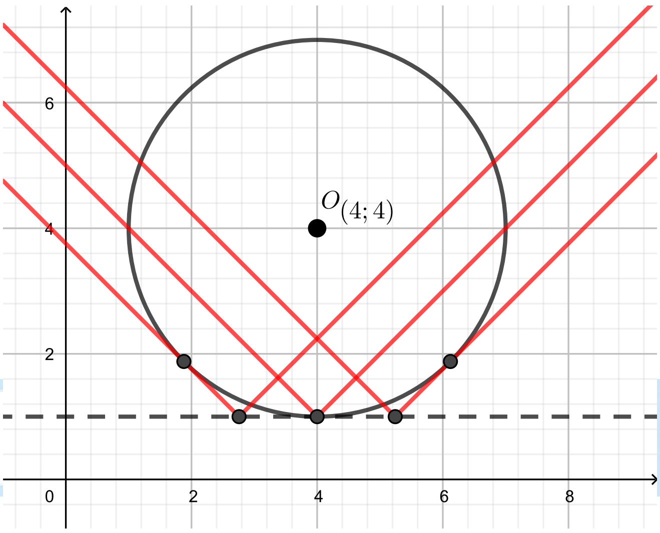
имеет три различных решения.

Ответ

$a=7-3\sqrt{2};4;1+3\sqrt{2}$

Решение

Первое уравнение — это окружность с центром $O=(4;4)$ и радиусом 3, второе — это график $y=|x|$, сдвинутый на 1 вверх, и на a вдоль оси Ox. Иначе говоря, это график $y=|x|$, вершина которого может находиться в произвольной точке на прямой $y=1$, в зависимости от a.



Пусть положения графика модуля пронумерованы слева направо от 1 до 3. Тогда видно, что левее 1 положения точек пересечения с окружностью не может быть больше двух. В 1 положении их ровно три, между 1 и 2 положениями их четыре, во 2 — две, между 2 и 3 — снова четыре, в 3 — три, правее 3 — меньше 3. То есть нам подходят только изображенные три положения. Очевидно, что 2 положению соответствует $a=4$, а 1 и 3 положения симметричны относительно прямой $x=4$. Найдем 1 положение.

1 способ (*расстояние от точки до прямой*)

Левая ветвь 1 уголка описывается условиями $y=-x+a+1, \quad x\leqslant a$. Касание этой прямой с окружностью эквивалентно тому, что расстояние он центра O до прямой равно радиусу окружности. Расстояние от точки (x_0,y_0) до прямой $ax+by+c=0$ описывается формулой

$$\rho=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Запишем условие в нашем случае расстояние от точки O до прямой $x+y-a-1=0$

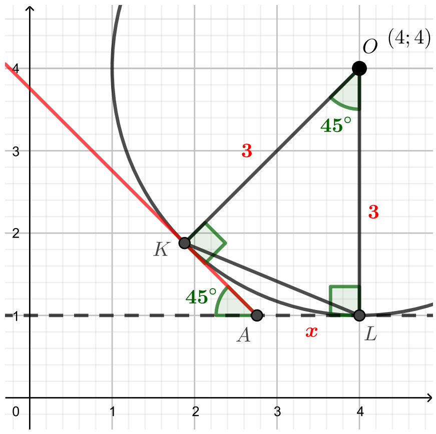
$$3=\frac{|1\cdot 4+1\cdot 4-a-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$|7-a|=3\sqrt{2}$$

$$a=7\pm 3\sqrt{2}$$

Нам подходит только значение, которое меньше 4, т.к. 1 положение левее 2. Для 3 положения находим из симметрии. Получаем ответ $a = 7 - 3\sqrt{2}; 4; 1 + 3\sqrt{2}$.

2 способ (*геометрический*)



Прямая, содержащая отрезок KA, параллельна прямой $y = -x$, а $AL \parallel Ox \Rightarrow \angle LAK = 135^\circ$.
$\angle KOL = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ (т.к. радиусы $\perp$ касательным). $KO = OL = 3$ — радиусы окружности.
По теореме косинусов для $\triangle KOL$

$$KL^2 = OK^2 + OL^2 - 2OK \cdot OL \cos \angle KOL$$

По теореме косинусов для $\triangle KAL$

$$KL^2 = AK^2 + AL^2 - 2AK \cdot AL \cos \angle KAL$$

Приравняем и решим уравнение

$$\begin{aligned}
&OK^2 + OL^2 - 2OK \cdot OL \cos \angle KOL = AK^2 + AL^2 - 2AK \cdot AL \cos \angle KAL\\
&18 - 18 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2x^2 - 2x^2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
&9\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = x^2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
&x^2 = 9 \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 9 \cdot \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}\\
&x = 3(1 - \sqrt{2}) \text{ (нам подходит только положительное)}
\end{aligned}$$

Тогда первому положению соответствует $a = 4 - x = 7 - 3\sqrt{2}$, третьему $a = 4 + x = 1 + 3\sqrt{2}$.

30. (*ЕГЭ 2019*) Найдите все a, при которых уравнение

$$\frac{|4x| - x - 3 - a}{x^2 - x - a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответ

$a \in (-3; +\infty) \backslash \{0; 2; 6; 12\}$

Решение

Левая часть обращается в 0, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен. Это эквивалентно системе с переменными a и x

$$\begin{cases} a = 4|x| - x - 3 \\ a \neq x^2 - x \end{cases}$$

Будем рассматривать условия как функции $a(x)$. Спроецировав множество решений на ось a, найдем сколько решений существует для каждого a.

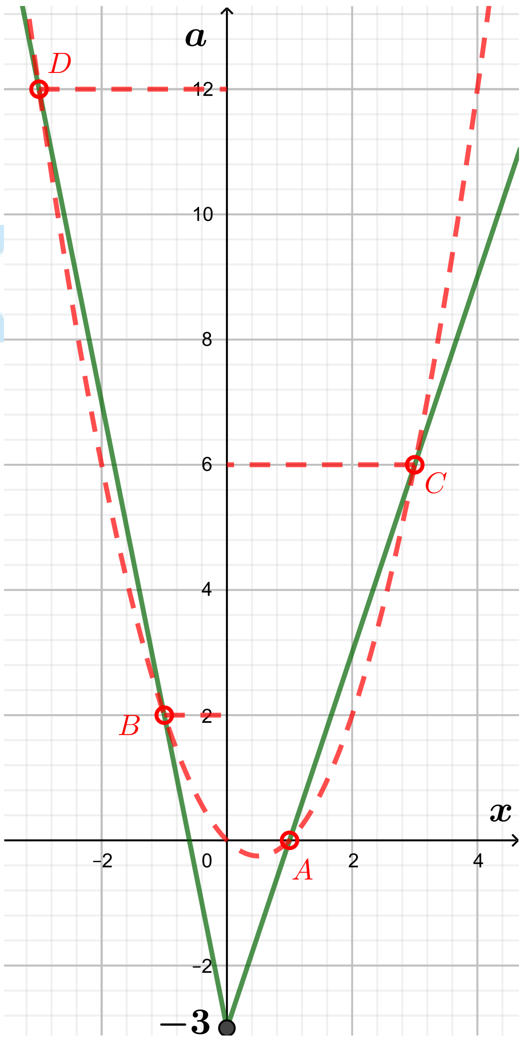
Построим график $a = 4|x| - x - 3$.

При $x \geqslant 0$ он примет вид $a = 3x - x$.

При $x < 0$ он примет вид $a = -5x - 3$.

График $a = x^2 + x$ это просто парабола.

Множество все пар $(x; a)$ решений системы соответствует множеству точек на плоскости, принадлежащих зеленому уголку, за исключением тех, которые выбивает красная парабола ($a \neq x^- x$). Нас интересуют значения a_0, которым соответствуют ровно пары решений (условно, некоторые $(x_{01}; a_0)$ и $(x_{02}; a_0)$). Всем a меньше -3 не соответствует ни одно решения, что видно по графику, остальным соответствуют по два решения, кроме тех, в которые проецируются "выбитые" точки. Найдем их.



Для точек A и C

$$\begin{cases} a = x^2 - x \\ a = 3x - 3 \end{cases}$$

$$x^2 - x = 3x - x$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = 1; 3 \quad a_{1,2} = 0; 6$$

Для точек B и D

$$\begin{cases} a = x^2 - x \\ a = -5x - 3 \end{cases}$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = -1; -3 \quad a_{1,2} = 2; 12$$

Получаем ответ $a \in (-3; +\infty) \backslash \{0; 2; 6; 12\}$.

31. (*ЕГЭ 2019*) Найдите все a, при которых уравнение

$$x^2 + (x-1)\sqrt{x-a} = x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

Ответ

$a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1]$

Решение

$$\begin{aligned} &x^2 - x + (x-1)\sqrt{x-a} = 0 \\ &(x-1)(x+\sqrt{x-a}) = 0 \end{aligned}$$

Левая часть обращается в 0, когда один из множителей равен нулю, а второй не теряет смысл. Это эквивалентно совокупности с переменными a и x

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x = 1 \\ x - a \geqslant 0 \end{cases} \\ &\sqrt{x-a} \geqslant 0 \end{aligned}\right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x = 1 \\ a \leqslant x \end{cases} \\ &\begin{cases} x \leqslant 0 \\ a = x - x^2 \end{cases} \end{aligned}\right.$$

Будем рассматривать условия как функции $a(x)$. Спроецировав множество решений на ось a, найдем сколько решений существует для каждого a.

Первая система это часть прямой $x = 1$, которая находится не выше прямой $a = x$.

Вторая система это часть параболы $a = x - x^2$, которая находится левее вертикальной оси.

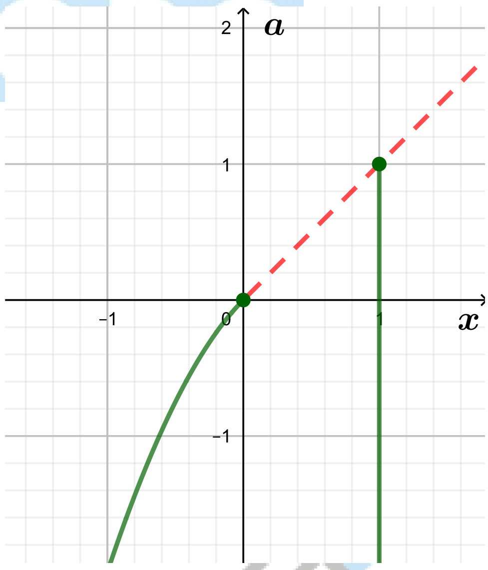
При всех $a > 1$ решений не будет вообще.

При $a \in (0; 1]$ будет ровно одно решение, и оно будет принадлежать отрезку $[0; 1]$.

При $a = 0$ будет два решения из отрезка $[0; 1]$.

При всех $a < 0$ будет два решения, из которых ровно одно принадлежит отрезку $[0; 1]$.

Получаем ответ $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1]$.



3 Раунд 3

3.1 Монотонные функции

Основные свойства монотонных функций

I. Сумма двух возрастающих функций – возрастающая функция;
если $f(x)$ – возрастающая функция, то $-f(x)$ – убывающая функция;
если $f(x)$ – возрастающая функция, то $f(x)+c$ – возрастающая функция (c – некоторое число).

II. Если функция $f(x)$ — строго монотонна на X, то из равенства $x_1 = x_2$ $(x_1, x_2 \in X)$ следует $f(x_1) = f(x_2)$, и наоборот.

Пример: функция $f(x) = \sqrt{x}$ является строго возрастающей при всех $x \in [0; +\infty)$, поэтому из равенства $\sqrt{x} = \sqrt{4}$ следует $x = 4$.

III. Если функция $f(x)$ — строго монотонна на X, то уравнение $f(x) = c$, где c — некоторое число, всегда имеет не более одного решения на X.

Пример: 1) функция $f(x) = x^2$ является строго убывающей при всех $x \in (-\infty; 0]$, поэтому уравнение $x^2 = 9$ имеет на этом промежутке $\leqslant 1$ решения, а точнее одно: $x = -3$.

2) функция $f(x) = -\dfrac{1}{x+1}$ является строго возрастающей при всех $x \in (-1; +\infty)$, поэтому уравнение $-\dfrac{1}{x+1} = 0$ имеет на этом промежутке не более одного решения, а точнее ни одного, т.к. числитель левой части никогда не может быть равен нулю.

IV. Если на $[a; b]$ $f(x)$ – возрастающая функция, а $g(x)$ – убывающая функция, то уравнение $f(x) = g(x)$ на $[a; b]$ имеет не более одного корня.

Пример: функция $f(x) = x^2$ является возрастающей на $[0; +\infty)$, а функция $g(x) = -x + 5$ – убывающей, следовательно, уравнение $x^2 = -x + 5$ имеет на $[0; +\infty)$ не более одного корня. В данном случае – ровно один корень.

V. Если функция $f(x)$ — неубывает (невозрастает) и непрерывна на отрезке $[a; b]$, причем на концах отрезка она принимает значения $f(a) = A, f(b) = B$, то при $C \in [A; B]$ $(C \in [B; A])$ уравнение $f(x) = C$ всегда имеет хотя бы одно решение.

Пример: функция $f(x) = x^3$ является строго возрастающей (то есть строго монотонной) и непрерывной при всех $x \in \mathbb{R}$, поэтому при любом $C \in (-\infty; +\infty)$ уравнение $x^3 = C$ имеет ровно одно решение: $x = \sqrt[3]{C}$.

VI. Если $f(x), g(x)$ – возрастающие функции, $h(x), p(x)$ – убывающие (на некотором множестве), то $f(g(x))$ – возрастающая, $f(h(x))$ – убывающая, $h(f(x))$ – убывающая, $h(p(x))$ – возрастающая.

Если $f(x)$ – возрастающая и знакопостоянная на некотором множестве (либо положительна, либо отрицательна), то $\dfrac{1}{f(x)}$ – убывающая. Аналогично с убывающей.

Если $f(x), g(x)$ – возрастающие неотрицательные функции, то $f(x) \cdot g(x)$ – возрастающая. Аналогично с убывающими.

35. (*ЕГЭ 2019*) Найдите все a, при которых уравнение

$$2\sin x + \cos x = a$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Ответ

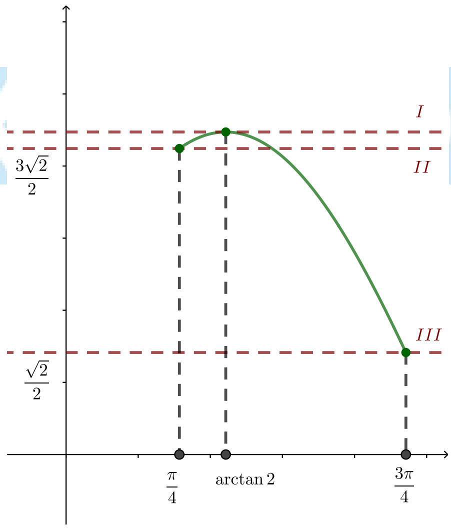
$a \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \cup \{\sqrt{5}\}$

Решение

Обозначим $f(x) = 2\sin x + \cos x$. Изучим характер монотонности на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

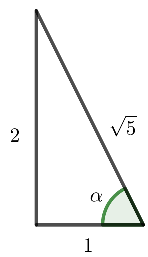
$$\begin{aligned}
&f' = 2\cos x - \sin x \\
&f' = 0 = 2\cos x - \sin x \\
&\operatorname{tg} x = 0 \\
&x = \operatorname{arctg} 2 \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]
\end{aligned}$$

$f'(\frac{\pi}{4}) > 0$, $f'(\frac{3\pi}{4}) < 0$, значит, f возрастает до точки $\operatorname{arctg} 2$, затем убывает.
$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $f(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(\frac{\pi}{4}) > f(\frac{3\pi}{4})$. Значит функция будет иметь вид



Прямая пересекает график в одной точке в положении I и от положения II до положения III, не включая положение II. Найдем координату y положения II

$$f(\operatorname{arctg} 2) = 2\sin\alpha + \cos\alpha = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$



Получаем ответ $a \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \cup \{\sqrt{5}\}$.

Важная теорема Функция f монотонно возрастает, либо убывает, тогда

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

36. Найдите значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$8x^6 + (a-x)^3 + 2x^2 + a = x$$

имеет хотя бы один корень.

Ответ

$a \in (-\infty; \frac{1}{8}]$

Решение

$$8x^6 + 2x^2 = -(a-x)^3 - a + x$$
$$(2x^2)^3 + 2x^2 = (x-a)^3 + (x-a)$$

Пусть $f(t) = t^3 + t$, она монотонно возрастает, как сумма двух монотонно возрастающих. Тогда равенство выше можно представить

$$f(2x^2) = f(x-a),$$

что по теореме равносильно $2x^2 = a$. Это квадратное уравнение имеет корни, когда $D = 1 - 8a \geqslant 0 \Rightarrow a \leqslant \frac{1}{8}$.

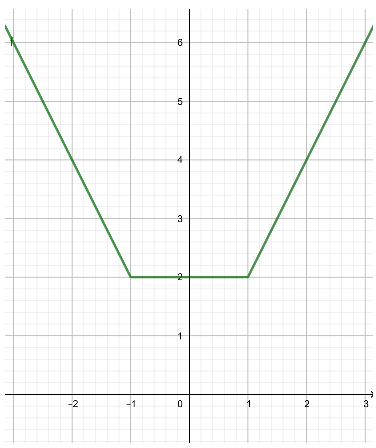
Корыто

$$y = |x-1| + |x+1|$$

Такую функцию называют корытом. Она эквивалента следующей системе

$$\begin{cases} y = -2x, & x < -1 \\ y = 2, & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ y = 2x, & x > 1 \end{cases}$$

График имеет следующий вид



Видно, что $|x-1| + |x+1| > 2$.

42. Найдите a, при которых уравнение

$$\left|x+\frac{a^2}{x}+1\right|+\left|x+\frac{a^2}{x}-1\right|=2$$

имеет хотя бы один корень.

Ответ

$a \in [-0.5; 0.5]$

Решение

Сделаем замену $t = x + \frac{a^2}{x}$, получим

$$|t-1|+|t+1|=2$$

В левой части имеем корыто, значит, левая часть может быть равна 2 только при $t \in [-1; 1]$. Имеем

$$-1 \leqslant t \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant x+\frac{a^2}{x} \leqslant 1$$

1. $a = 0$

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Решения есть, значит это a подходит.

2. $a \neq 0$, поделим на $|a|$, получим

$$-\frac{1}{|a|} \leqslant \frac{x}{|a|}+\frac{|a|}{x} \leqslant \frac{1}{|a|} \Leftrightarrow \left|\frac{x}{|a|}+\frac{|a|}{x}\right| \leqslant \frac{1}{|a|}$$
$$\left|\frac{x}{|a|}+\frac{|a|}{x}\right| \geqslant 2 \text{ (сумма взаимнообратных)}$$
$$2 \leqslant \frac{1}{|a|}$$
$$a \in [-0.5; 0.5] \backslash 0$$

Объединив, получим ответ $a \in [-0.5; 0.5]$.

40. (Идея главного слагаемого) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$4x-|3x-|x+a||=9|x-1|$$

имеет хотя бы один корень.

Ответ

$a \in [-8; 6]$

Решение

$$4x-|3x-|x+a||-9|x-1|=0$$

Посмотрим, как могут раскрываться разные модули, а точнее, какой коэффициент при x может получиться после раскрытия.

После раскрытия $|x+a|$ коэффициент при x будет равен ± 1.

Тогда у выражения $3x - |x+a|$ коэффициент может быть равен $3 \pm 1 = 2; 4$, соответственно у выражения $|3x - |x+a||$ коэффициент может быть равен $\pm 2; \pm 4$.

Тогда у выражения $4x - |3x - |x+a||$ коэффициент может быть равен $4 \pm 2; 4 \pm 4$, т.е. по модулю он точно меньше 9. Значит, коэффициент, который вылезет из выражения $-9|x-1|$ определит знак коэффициента при x у всей левой части, независимо от раскрытия остальных модулей. При $x > 1$ он будет отрицательным, при $x < 1$ — положительным. Получается, функция будет строго возрастать до точки -1, после нее — строго убывать, причем неограниченно.

В таком случае, существование корней равносильно тому, что значение функции в точке -1 неотрицательно.

$$f(1) = 4 - |3 - |a+1|| \geqslant 0$$
$$|3 - |a+1|| \leqslant 4$$
$$-4 \leqslant 3 - |a+1| \leqslant 4$$
$$-1 \leqslant |a+1| \leqslant 7$$
$$|a+1| \leqslant 7$$
$$a \in [-8; 6]$$