Теоретический минимум по неравенствам

Содержание

1 Решение стандартных неравенств

1.1 Стандартные логарифмические неравенства

Рассмотрим стандартное логарифмическое неравенство

$$\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x),$$

где $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$ — фиксированное число (для знаков $\leqslant, >, <$ все работает аналогично).

Данное неравенство приводится к одному из двух следующих видов (поведение, описанное ниже, обусловлено тем, что функция логарифма **убывает** при основании $0 < a < 1$ и **возрастает** при основании $a > 1$):

- При $a > 1$ неравенство равносильно системе (знак между аргументами логарифмов **соответствует** знаку между логарифмами в исходном неравенстве)

$$\begin{cases} f(x) \geqslant g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant g(x) > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} f(x) \geqslant g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}}$$

- При $0 < a < 1$ неравенство равносильно системе (знак между аргументами логарифмов **противоположен** знаку между логарифмами в исходном неравенстве)

$$\begin{cases} f(x) \leqslant g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) \leqslant g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} f(x) \leqslant g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}}$$

1.2 Стандартные показательные неравенства

Рассмотрим стандартное показательное неравенство

$$a^{f(x)} \geqslant a^{g(x)},$$

где $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ a \neq 1$ — фиксированное число (для знаков $\leqslant, >, <$ все работает аналогично).

Данное неравенство приводится к одному из двух следующих видов (поведение, описанное ниже, обусловлено тем, что показательная функция **убывает** при основании $0 < a < 1$ и **возрастает** при основании $a > 1$):

- При $a > 1$ неравенство равносильно неравенству (знак между показателями степени **соответствует** знаку между функциями в исходном неравенстве)

$$a^{f(x)} \geqslant a^{g(x)}$$

- При $0 < a < 1$ неравенство равносильно неравенству (знак между показателями степени **противоположен** знаку между функциями в исходном неравенстве)

$$a^{f(x)} \leqslant a^{g(x)}$$

2 Метод интервалов

Рассмотрим общий метод для решения любого рационального неравенства, то есть неравенства вида

$$(**) \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} \geqslant 0 \qquad \text{(на месте } \geqslant \text{ может стоять любой из знаков } \leqslant,\ <,\ >\text{)}$$

Область допустимых значений x (ОДЗ) таких неравенств — все вещественные числа, кроме нулей знаменателя.

Алгоритм решения методом интервалов Заметим, что первые три шага созданы для того, чтобы преобразовать неравенство к более простому виду, что поможет вам не допустить ошибку в решении подобных задач. Метод интервалов — это всего лишь удобный инструмент для решения рациональных неравенств, и если вы будете всегда пользоваться одним и тем же алгоритмом, то вероятность допустить ошибку при решении таких неравенств будет минимальной. Данный алгоритм специально расписан подробно, чтобы у вас не возникло вопросов; всего после нескольких использований этого алгоритма вы будете решать рациональные неравенства очень быстро и без ошибок!

1. Необходимо перенести все слагаемые в одну часть (пусть это будет левая часть) неравенства так, чтобы в другой части неравенства остался 0, и привести эти слагаемые к общему знаменателю так, чтобы в левой части неравенства получилась дробь. Затем нужно разложить числитель и знаменатель полученной дроби, то есть многочлены $P(x)$, $Q(x)$, на множители.

   Например, неравенство $\dfrac{1}{x+1} < 1$ нужно переписать в виде $\dfrac{1}{x+1} - 1 < 0$, затем привести к общему знаменателю $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x+1}{x+1} < 0$, затем записать в виде одной дроби левую часть $\dfrac{1-(x+1)}{x+1} < 0$ и привести подобные слагаемые $\dfrac{-x}{x+1} < 0$.
   Итак, пусть после разложения на множители неравенство приняло вид

$$\frac{x^2(x-1)^3(x+1)(2x^2+3x+5)(2x-x^2-3)}{(x+1)^3(3-x)(2-3x)^2} \geqslant 0$$

   Заметим, что любой многочлен можно (а в нашем способе НУЖНО) разложить до произведения **только** линейных скобок $(ax+b)$ и квадратичных скобок с отрицательным дискриминантом (ax^2+bx+c), $D<0$.

2. Рассмотрим скобки, в которых остался квадратичный трехчлен с $D<0$.

   2.1. Если при x^2 находится положительный коэффициент $a>0$, то при всех значениях x выражение ax^2+bx+c положительно (не может быть равно нулю!). Т.к. мы имеем право делить неравенство на любое число/выражение, не равное 0, то разделим обе части неравенства на такие скобки (в нашем неравенстве такой скобкой является $(2x^2+3x+5)$). Причем заметим, что т.к. мы делим на **положительное выражение**, то знак неравенства не меняется!

   2.2. Если при x^2 находится отрицательный коэффициент $a<0$, то при всех значениях x выражение ax^2+bx+c отрицательно. Т.к. мы имеем право делить неравенство на любое число/выражение, не равное 0, то разделим обе части неравенства на такие скобки (в нашем неравенстве такой скобкой является $(2x-x^2-3)$). Причем заметим, что т.к. мы делим на **отрицательное выражение**, то знак неравенства должен измениться на противоположный!

   Итак, **обобщим второй шаг**: квадратичные скобки с отрицательным дискриминантом можно просто вычеркнуть, причем при вычеркивании скобок с $a>0$ знак неравенства остается прежним, а вот при вычеркивании скобок с $a < 0$ знак неравенства меняется на противоположный столько раз, сколько было таких скобок. Лучше вычеркивать их последовательно по одной, **каждый раз** меняя знак неравенства на противоположный.

Таким образом, неравенство примет вид

$$\frac{x^2(x-1)^3(x+1)}{(x+1)^3(3-x)(2-3x)^2} \leqslant 0$$

3. Рассмотрим линейные скобки $(ax+b)$.

   Назовем скобку *хорошей*, если при x находится положительный коэффициент (такие скобки мы трогать не будем), и *плохой*, если при x находится отрицательный коэффициент (в таких скобках необходимо поменять все знаки на противоположные, то есть сделать их хорошими).

   Для того, чтобы в одной плохой скобке поменять все знаки на противоположные, необходимо домножить правую и левую части неравенства на -1. Таким образом, после одного такого действия знак неравенства сменится на противоположный. Значит, если плохих скобок четное количество, то знак неравенства не изменится, если нечетное — то знак неравенства изменится на противоположный.

   Заметим, что выражение $(ax+b)^n$ — это ни что иное, как произведение n скобок $(ax+b)$. В нашем неравенстве среди плохих одна скобка $(3-x)$ и две скобки $(2x-3)$ (т.к. $(2-3x)^2 = (2-3x)(2-3x)$), то есть всего три плохих скобки, следовательно, знак неравенства изменится и неравенство примет вид:

$$\frac{x^2(x-1)^3(x+1)}{(x+1)^3(x-3)(3x-2)^2} \geqslant 0 \quad (***)$$

   Заметим, что множитель x^2 — это скобка $(x-0)^2$, или, что то же самое, $(x-0)(x-0)$ — произведение двух одинаковых линейных скобок.

4. Теперь, когда левая часть неравенства состоит из произведения только хороших линейных скобок (в каких-то степенях), можно приступить к самому методу интервалов.

   Его суть состоит в том, что левая часть неравенства — всюду непрерывная функция, кроме тех точек, где знаменатель дроби равен нулю. Поэтому точки, в которых эта функция равна нулю (то есть ее числитель равен нулю) и точки, в которых эта функция не существует (то есть ее знаменатель равен нулю), разбивают область определения этой функции на промежутки, причем **на каждом промежутке функция принимает значения строго одного знака**.

   А нам как раз нужно найти те значения x, при которых функция $\geqslant 0$. Причем, т.к. наша функция — рациональная, то ее область определения — это все действительные числа ($\mathbb{R}$), кроме нулей знаменателя. Поэтому отметим нули каждой скобки на вещественной прямой (а нуль каждой скобки — это как раз нуль числителя или знаменателя), причем нули знаменателя — выколотые, нули числителя — закрашенные (если знак неравенства нестрогий, как в примере, то есть $\geqslant$ или $\leqslant$) или выколотые (если знак неравенства строгий, то есть $>$ или $<$). Заметим, что если мы отметили n точек, то числовая прямая разобьется на $n+1$ промежутков.

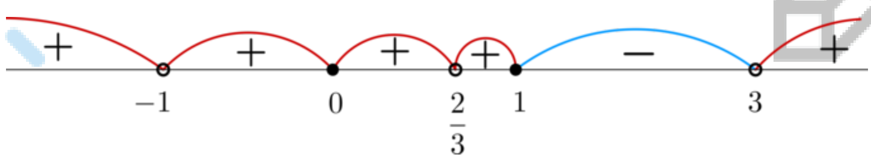
   Расставим знаки на всех промежутках **справа налево**. Будем ставить «+», если функция на этом промежутке принимает положительные значения, и «−» — если отрицательные. Нулю функция равна в закрашенных точках.

   Первые три шага мы делали для того, чтобы не подставлять точки из каждого промежутка и не вычислять, какого знака будет левая часть неравенства (что бывает неудобно, если числа, которые нужно *отмечать на прямой, «некрасивые»). Знаки мы будем расставлять, выявив некоторую закономерность. Какую — вы узнаете дальше. Но в любом случае способ расстановки знаков путем подстановки чисел остается в нашем арсенале.*

Т.к. все скобки — хорошие, то первый справа знак всегда будет «+» (именно для этого мы и приводили неравенство к такому виду!). Действительно, если подставить любое число, превышающее самый большой нуль (у нас самый большой нуль $x = 3$), то каждая скобка будет положительна, значит, и произведение таких скобок будет всегда положительно.

Если какой-то нуль входит в четное количество скобок, то при переходе через него (справа налево!) знак меняться не будет. В нашем неравенстве это точки -1, 0, $\dfrac{2}{3}$ (например, точка -1 входит в четное количество скобок: одна в числителе $(x+1)$ и три в знаменателе $(x+1)^3$).

Если нуль входит в нечетное количество скобок, то при переходе через эту точку (справа налево!) знак будет меняться (в нашем неравенстве это точки 3 и 1).



5. Неравенство практически решено и нам остается только записать ответ. В нашем случае, т.к. знак преобразованного неравенства $\geqslant 0$ (нестрогий), то в ответ пойдут промежутки со знаком «+» (где значение функции больше нуля) и закрашенные точки (где значение функции равно нулю):

$$x \in \Big(-\infty; -1\Big) \cup \Big(-1; \frac{2}{3}\Big) \cup \Big(\frac{2}{3}; 1\Big] \cup \Big(3; +\infty\Big)$$

3 Метод рационализации

Метод рационализации — это способ решения некоторых неравенств, который позволяет довольно сильно упростить решение и вычисления. Далее рассмотрим несколько случаев, когда он применим.

3.1 I случай

Рассмотрим метод рационализации для решения показательных неравенств вида

$$(h(x))^{f(x)} \geqslant (h(x))^{g(x)}$$

Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} (h(x)-1)(f(x)-g(x)) \geqslant 0 \\ h(x) > 0 \end{cases}$$

3.2 II случай

Рассмотрим метод рационализации для решения логарифмических неравенств вида

$$\log_{h(x)} f(x) \geqslant \log_{h(x)} g(x)$$

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (h(x)-1)(f(x)-g(x)) \geqslant 0 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \end{cases}$$

Пример 1 Решить неравенство $\log_{(x^2-1)} \dfrac{2x^2+3x-5}{x+1} \leqslant 1$.

Выпишем и решим ОДЗ отдельно:

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1 \neq 1 \\ \dfrac{2x^2+3x-5}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1)>0 \\ x \neq \pm\sqrt{2} \\ \dfrac{2(x-1)(x+2,5)}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;-1)\cup(1;+\infty) \\ x \neq \pm\sqrt{2} \\ x \in (-2,5;-1)\cup(1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-2,5;-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$$

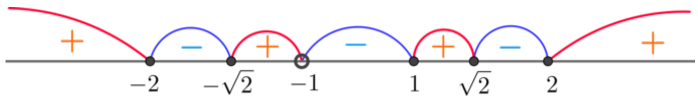
Тогда на ОДЗ, учитывая, что $1=\log_{(x^2-1)}(x^2-1)$, наше неравенство равносильно неравенству

$$(x^2-1-1)\left(\frac{2x^2+3x-5}{x+1}-(x^2-1)\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2-2)(-x^3+x^2+4x-4)}{x+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2(x-1)-4(x-1))}{x+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2-4)(x-1)}{x+1} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-2)(x+2)(x-1)}{x+1} \geqslant 0$$

Полученное неравенство можно решить методом интервалов:



Таким образом, решением будут

$$x \in (-\infty;-2]\cup[-\sqrt{2};-1)\cup[1;\sqrt{2}]\cup[2;+\infty)$$

Пересечем данное решение с ОДЗ и получим

$$x \in (-2,5;-2]\cup(-\sqrt{2};-1)\cup(1;\sqrt{2})\cup[2;+\infty)$$

■

3.3 III случай

Более общий случай применения метода рационализации: если неравенство представлено в виде $F(x) \vee 0$ ($\vee$ — один из знаков $\geqslant$, $\leqslant$, $>$, $<$), причем функция $F(x)$ является произведением и/или частным нескольких множителей, то на ОДЗ:

- если какой-то множитель имеет вид $h(x)^{f(x)} - h(x)^{g(x)}$, то его можно заменить на $(h-1)(f-g)$;
- если какой-то множитель имеет вид $\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x)$, то его можно заменить на $(h-1)(f-g)$.

Пример 2 Решить неравенство

$$\frac{(1-4x^2)^3 \cdot \left(\log_5(x+2) - \log_{25} x^2\right)\sqrt{x^2-1}}{2^{x+1}-8} \geqslant 0$$

Найдем ОДЗ данного неравенства:

$$\begin{cases} x^2-1 \geqslant 0 \\ x+2>0 \\ x^2>0 \\ 2^{x+1} \neq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 1 \text{ или } x \leqslant -1 \\ x>-2 \\ x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow x \in (-2;-1] \cup [1;2) \cup (2;+\infty)$$

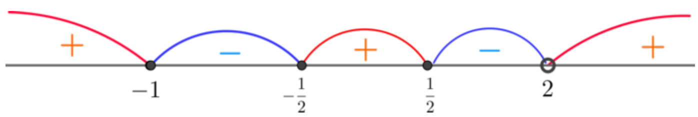
Решим данное неравенство на ОДЗ.
На ОДЗ $\log_5(x+2) = \log_{25}(x+2)^2$, следовательно, применяя метод рационализации, получим:

$$\frac{(4x^2-1)^3(25-1)((x+2)^2-x^2)\sqrt{x^2-1}}{(2-1)(x+1-3)} \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(2x-1)^3(2x+1)^3(2x+2)\sqrt{x^2-1}}{x-2} \leqslant 0$$

Заметим, что $\sqrt{x^2-1} \geqslant 0$ при всех x из ОДЗ, причем в точках $x = \pm 1$ выражение $\sqrt{x^2-1} = 0$. Таким образом, это выражение не будет влиять на знак левой части, но точки $x = \pm 1$ будут являться решением неравенства, т.к. при этих x левая часть неравенства равна 0. Следовательно, данное неравенство на ОДЗ будет равносильно:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{(2x-1)^3(2x+1)^3(2x+2)}{x-2} \leqslant 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$$

Решим неравенство из совокупности методом интервалов:



Таким образом, решением данной совокупности будут

$$x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right) \cup \{-1; 1\} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right)$$

Пересекая данное решение с ОДЗ, получим итоговый ответ:

$$x \in \{-1\} \cup [1; 2)$$

■