Теоретический минимум по тригонометрии

Содержание

1 Базовые тригонометрические факты

1.1 Табличные значения тригонометрических функций

Таблица синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов углов из первой четверти:

	$0 \quad (0^\circ)$	$\frac{\pi}{6} \quad (30^\circ)$	$\frac{\pi}{4} \quad (45^\circ)$	$\frac{\pi}{3} \quad (60^\circ)$	$\frac{\pi}{2} \quad (90^\circ)$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

1.2 Формулы приведения

Пользуясь периодичностью функций sin и cos, мы можем упрощать их аргументы по следующим формулам:

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(2\pi \pm \alpha) = \pm\sin\alpha$	$\cos(2\pi \pm \alpha) = \cos\alpha$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm\sin\alpha$

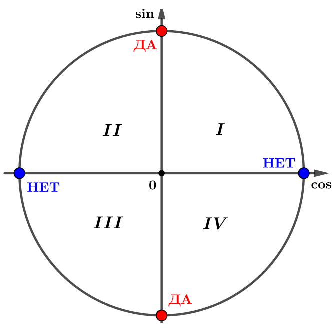
Обобщенный алгоритм действий для упрощения аргумента.

Сразу же для наглядности будем применять алгоритм для упрощения $\cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$, где $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$.

1. Приведем аргумент к виду $\beta + \alpha$, где $\beta = k \cdot \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$. Фактически выделим часть "кратную" $\frac{\pi}{2}$.

   В нашем частном случае аргумент $\frac{7\pi}{2} + \alpha$ уже в нужном виде.

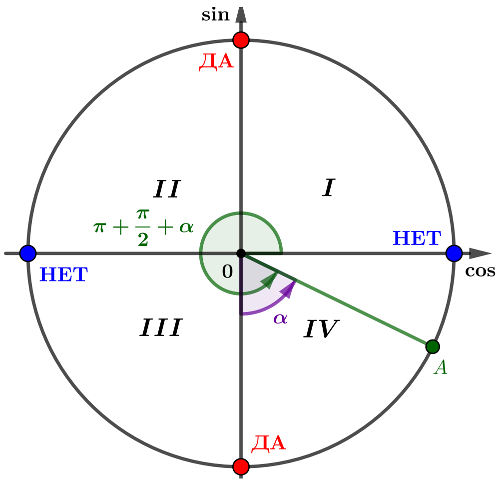
2. Рассматриваем часть $\beta = k \cdot \frac{\pi}{2}$ аргумента. Если соответствующий угол β попадает в точку, отмеченную "ДА" на единичной окружности, то нужно поменять функцию на кофункцию, если в точку "НЕТ" — функция сохранится.



Несложно видеть, что $\frac{7\pi}{2} = 3\pi + \frac{\pi}{2} = 3\pi + \frac{\pi}{2}$ попадает в "ДА". Имеем ($\bullet$ означает, что со знаком мы еще не определились):

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = \bullet\sin\alpha$$

3. Знак будет такой же, как у **исходной** функции с аргументом $\beta + \alpha$, его тоже легко определяем на круге. *Очевидно, что* $\cos\left(\dfrac{7\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(3\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$. *Найдем угол* $\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha$ *на круге и определим знак, который там имеет исходная функция — в нашем случае это* $\cos$.



По картинке очевидно, что проекция точки A на горизонтальную ось косинусов положительна, значит
• *обращается в* $+$. *Итого получили:*

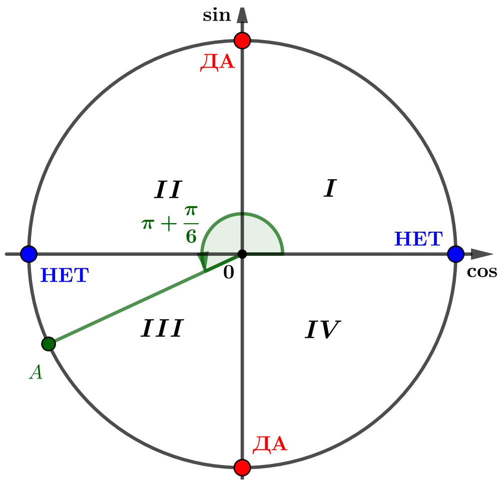
$$\cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = +\sin\alpha = \sin\alpha$$

Далее разберем еще один пример.

Пример Пусть нам дан $\sin\dfrac{31\pi}{6}$. Приведем к удобному нам виду:

$$\sin\frac{31\pi}{6} = \sin\left(5\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

В роли β у нас 5π, а $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$. Очевидно, что 5π попадает в "НЕТ". Значит, итоговая функция будет синусом как и исходная. Знак итоговой будет равен знаку $\sin\left(5\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$, то есть минусу.



Получим

$$\sin\frac{31\pi}{6} = \sin\left(5\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

■

1.3 Наиболее распространенные тригонометрические формулы

Основные тождества

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ $(\sin\alpha\neq 0, \cos\alpha\neq 0)$
$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\cos\alpha\neq 0)$	$\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\sin\alpha\neq 0)$

Формулы сложения углов

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\sin\beta\cdot\cos\alpha$	$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$
$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ $\cos\alpha\cos\beta\neq 0,\ \cos(\alpha\pm\beta)\neq 0$	$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=-\dfrac{1\mp\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta}$ $\sin\alpha\sin\beta\neq 0,\ \sin(\alpha\pm\beta)\neq 0$

Формулы двойного и тройного углов

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$	$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$
$\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ $\cos\alpha\neq 0,\ \cos 2\alpha\neq 0$	$\operatorname{ctg}2\alpha=\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$ $\sin\alpha\neq 0,\ \sin 2\alpha\neq 0$
$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$	$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

Формулы понижения степени

$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$	$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

Формулы произведения функций

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\Big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\Big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\Big)$$

Формулы суммы/разности функций

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \cos\alpha\cos\beta\neq 0$	$\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\ \sin\alpha\sin\beta\neq 0$

Выражение синуса и косинуса через тангенс половинного угла

$\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$
$\cos\alpha\neq 0$	$\cos\alpha\neq 0$

Формула вспомогательного аргумента

Частный случай
$\sin\alpha\pm\cos\alpha=\sqrt{2}\cdot\sin\left(\alpha\pm\frac{\pi}{4}\right)$ $\sqrt{3}\sin\alpha\pm\cos\alpha=2\sin\left(\alpha\pm\frac{\pi}{6}\right)$ $\sin\alpha\pm\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha\pm\frac{\pi}{3}\right)$
Общий случай
$a\sin\alpha\pm b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(\alpha\pm\phi),\quad \cos\phi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\phi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

1.4 Элементарные тригонометрические уравнения

Стандартные (простейшие) тригонометричекие уравнения — это уравнения вида

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = b, \quad \operatorname{ctg} x = b,$$

которые имеют смысл при $-1 \leqslant a \leqslant 1,\ b \in \mathbb{R}$.

Их решения в общем случае выглядят следующим образом:

Уравнение	Ограничения	Решение
$\sin x = a$	$-1 \leqslant a \leqslant 1$	$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n \end{array}\right., \ n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$	$-1 \leqslant a \leqslant 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = b$	$b \in \mathbb{R}$	$x = \operatorname{arctg} b + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = b$	$b \in \mathbb{R}$	$x = \operatorname{arcctg} b + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

2 Виды тригонометрических уравнений

2.1 Квадратные тригонометрические уравнения

Если после преобразования уравнение приняло следующий вид:

$$af^2(x) + bf(x) + c = 0,$$

где $a \neq 0$, $f(x)$ — одна из функций $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$, то такое уравнение с помощью замены $f(x) = t$ сводится к квадратному уравнению.

Часто при решении таких уравнений используются основные тождества и формулы двойного угла.

Пример 1 Решить уравнение $5\sin 2x = \cos 4x - 3$.

С помощью формулы двойного угла для косинуса $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ имеем:

$$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$$

Сделаем эту подстановку и получим:

$$2\sin^2 2x + 5\sin 2x + 2 = 0$$

Сделаем замену $t = \sin 2x$. Т.к. область значений синуса $\sin 2x \in [-1; 1]$, то $t \in [-1; 1]$. Получим уравнение:

$$2t^2 + 5t + 2 = 0$$

Корни данного уравнения $t_1 = -2$, $t_2 = -\frac{1}{2}$. Таким образом, корень t_1 не подходит. Сделаем обратную замену:

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{12} + \pi n,\ x_2 = -\frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

■

Пример 2 Решить уравнение $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x + 4 = 0$.

Т.к. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$, то $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$. Сделаем замену $\operatorname{tg} x = t$. Т.к. область значений тангенса $\operatorname{tg} x \in \mathbb{R}$, то $t \in \mathbb{R}$. Получим уравнение:

$$t + \frac{3}{t} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{t^2 + 4t + 3}{t} = 0$$

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Таким образом:

$$\begin{cases} t^2 + 4t + 3 = 0 \\ t \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -3 \\ t_2 = -1 \end{array}\right.$$

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -3 \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \end{array}\right. \quad n \in \mathbb{Z}$$

■

2.2 Кубические тригонометрические уравнения

Если после преобразования уравнение приняло следующий вид:

$$af^3(x) + bf^2(x) + cf(x) + d = 0,$$

где $a \neq 0$, $f(x)$ — одна из функций $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$, то такое уравнение с помощью замены $f(x) = t$ сводится к кубическому уравнению.

Часто при решении таких уравнений в дополнение к предыдущим формулам используются формулы тройного угла.

Пример 3 Решить уравнение $11 \cos 2x - 3 = 3 \sin 3x - 11 \sin x$.

При помощи формул $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ и $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ данное уравнение можно свести к уравнению только с $\sin x$:

$$12 \sin^3 x - 9 \sin x + 11 \sin x - 3 + 11 - 22 \sin^2 x = 0$$

Сделаем замену $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$:

$$6t^3 - 11t^2 + t + 4 = 0$$

Подбором находим, что один из корней равен $t_1 = 1$. Выполнив деление в столбик многочлена $6t^3 - 11t^2 + t + 4$ на $t - 1$, получим:

$$(t - 1)(2t + 1)(3t - 4) = 0$$

Корнями являются $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$, $t_3 = \frac{4}{3}$

Таким образом, корень t_3 не подходит. Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{aligned} &\sin x = 1\\ &\sin x = -\frac{1}{2}\end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n\\ &x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\\ &x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\end{aligned}\right. \quad n \in \mathbb{Z}$$

■

2.3 Однородные тригонометрические уравнения второй степени

Общий вид (I)

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0, \quad a \neq 0, c \neq 0$$

Заметим, что в данном уравнении **никогда** не являются решениями те значения x, при которых $\cos x = 0$ или $\sin x = 0$. Действительно, если $\cos x = 0$, то, подставив вместо косинуса ноль в уравнение, получим: $a\sin^2 x = 0$, откуда следует, что и $\sin x = 0$. Но это противоречит основному тригонометрическому тождеству, т.к. оно говорит о том, что если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$.

Аналогично и $\sin x = 0$ не является решением такого уравнения.

Значит, данное уравнение можно делить на $\cos^2 x$ или на $\sin^2 x$. Разделим, например, на $\cos^2 x$:

$$a\,\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b\,\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} + c\,\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow a\mathrm{tg}^2\, x + b\mathrm{tg}\, x + c = 0$$

Таким образом, данное уравнение при помощи деления на $\cos^2 x$ и замены $t = \mathrm{tg}\, x$ сводится к квадратному уравнению:

$$at^2 + bt + c = 0,$$

способ решения которого нам известен.

Уравнения вида

$$I'. \quad a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d, \quad a \neq 0, c \neq 0$$

с легкостью сводятся к уравнению вида I с помощью использования основного тригонометрического тождества:

$$d = d \cdot 1 = d \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

Пример 4 Решить уравнение $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x = 3\cos^2 x + 1$

Подставим вместо 1 выражение $\sin^2 x + \cos^2 x$ и получим:

$$\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0$$

Разделим полученное уравнение на $\cos^2 x$:

$$\mathrm{tg}^2\, x + 3\mathrm{tg}\, x - 4 = 0$$

и сделаем замену $t = \mathrm{tg}\, x,\ t \in \mathbb{R}$. Уравнение примет вид:

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

Корнями являются $t_1 = -4$, $t_2 = 1$. Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{aligned} &\operatorname{tg} x = 1 \\ &\operatorname{tg} x = -4 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ &x = -\operatorname{arctg} 4 + \pi n \end{aligned}\right. \qquad n \in \mathbb{Z}$$

■

2.4 Однородные тригонометрические уравнения первой степени

Общий вид

$$a \sin x + b \cos x = 0, \quad a \neq 0, b \neq 0$$

Заметим, что в данном уравнении никогда не являются решениями те значения x, при которых $\cos x = 0$ или $\sin x = 0$. Действительно, если $\cos x = 0$, то, подставив вместо косинуса ноль в уравнение, получим: $a \sin x = 0$, откуда следует, что и $\sin x = 0$. Но это противоречит основному тригонометрическому тождеству, т.к. оно говорит о том, что если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$.

Аналогично и $\sin x = 0$ не является решением такого уравнения.

Значит, данное уравнение можно делить на $\cos x$ или на $\sin x$.

Разделим, например, на $\cos x$:

$$a\,\frac{\sin x}{\cos x} + b\,\frac{\cos x}{\cos x} = 0,$$

откуда имеем

$$a \operatorname{tg} x + b = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$$

Пример 5 Решить уравнение $\sin x + \cos x = 0$.

Разделим правую и левую части уравнения на $\sin x$:

$$1 + \operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

■

2.5 Неоднородные тригонометрические уравнения первой степени

Общий вид

$$a \sin x + b \cos x = c, \quad a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$$

Рассмотрим способ решения при помощи **формулы вспомогательного угла**.

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\,\sin(x + \phi), \quad \text{где } \cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Для использования данной формулы нам понадобятся формулы сложения углов.

Пример 6 Решить уравнение $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = -1$.

Т.к. мы решаем уравнение, то можно не преобразовывать левую часть, а просто разделить обе части уравнения на $\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$:

$$\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

Заметим, что числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ получились табличные. Можно, например, взять $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$. Тогда уравнение примет вид:

$$\sin 2x \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Решениями данного уравнения являются:

$$\left[\begin{aligned} &2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ &2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &x = \frac{\pi}{12} + \pi n \\ &x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \end{aligned}\right. \quad n \in \mathbb{Z}$$

■

2.6 Формулы сокращенного умножения в тригонометрическом варианте

Следующие формулы бывают полезны для сведения уравнения к одному из вышеуказанных видов:

1. Квадрат суммы или разности

$$(\sin x \pm \cos x)^2 = \sin^2 x \pm 2\sin x\cos x + \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) \pm 2\sin x\cos x = 1 \pm \sin 2x$$

2. Разность квадратов

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

3. Сумма или разность кубов

$$\sin^3 x \pm \cos^3 x = (\sin x \pm \cos x)(\sin^2 x \mp \sin x\cos x + \cos^2 x) = (\sin x \pm \cos x)(1 \mp \sin x\cos x)$$

4. Куб суммы или разности

$$(\sin x \pm \cos x)^3 = (\sin x \pm \cos x)(\sin x \pm \cos x)^2 = (\sin x \pm \cos x)(1 \pm \sin 2x)$$

3 Отбор корней

3.1 Геометрический способ (по окружности)

Этот способ заключается в том, что мы отмечаем решения всех уравнений (неравенств) на единичной окружности и пересекаем (объединяем) их.

Пример 1 Найти корни уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$, если $\cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

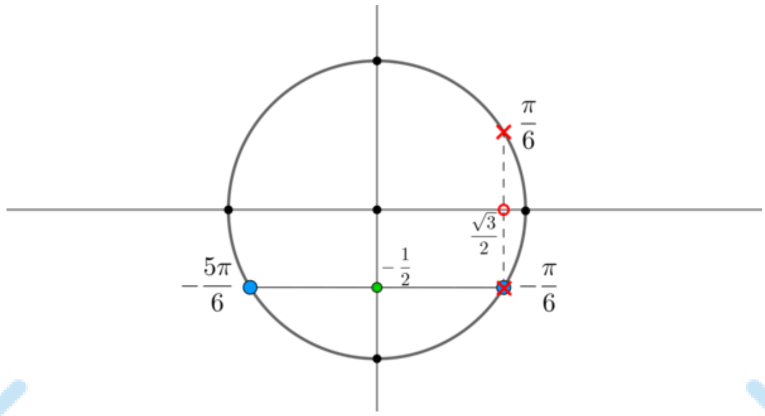
В данном случае необходимо пересечь решения первого уравнения с решением второго уравнения. Решением первого уравнения являются

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \ x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z},$$

решением второго являются

$$x \neq \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Отметим эти точки на окружности:



Видим, что из двух точек, удовлетворяющих первому уравнению, одна точка $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ не подходит. Следовательно, ответом будут только $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. ■

3.2 Вычислительный способ

Этот способ заключается в подстановке решений уравнения (системы) в имеющиеся ограничения. Для данного способа будут полезны некоторые частные случаи формул приведения:

$$\sin(\alpha + \pi n) = \begin{cases} \sin\alpha, \text{при } n - \text{ четном} \\ -\sin\alpha, \text{при } n - \text{ нечетном} \end{cases}$$

$$\cos(\alpha + \pi n) = \begin{cases} \cos\alpha, \text{при } n - \text{ четном} \\ -\cos\alpha, \text{при } n - \text{нечетном} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\alpha$$

Пример 2 Решить систему

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x + \cos x > 0 \end{cases}$$

Решением уравнения являются

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \; x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z}$$

Подставим в неравенство $\sin x + \cos x > 0$ по очереди оба корня:

$$\sin x_1 + \cos x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} > 0,$$

следовательно, корень x_1 нам подходит;

$$\sin x_2 + \cos x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} < 0,$$

следовательно, корень x_2 нам не подходит.

Таким образом, решением системы являются только

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

■

3.3 Алгебраический способ (двойное неравенство)

Пример 3 Найти корни уравнения $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$.

Решением уравнения являются

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Для того, чтобы отобрать корни, решим два неравенства: $0 \leqslant x_1 \leqslant \pi$ и $0 \leqslant x_2 \leqslant \pi$:

$$0 \leqslant \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leqslant \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{8} \leqslant n \leqslant \frac{3}{8}$$

Таким образом, единственное целое значение n, удовлетворяющее этому неравенству, это $n = 0$. При этом n $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$ — входит в отрезок $[0;\pi]$.

Аналогично решаем неравенство $0 \leqslant x_2 \leqslant \pi$ и получаем $n = 0$ и $x_2 = \dfrac{3\pi}{4}$. ■