

Теоретический минимум по тригонометрии

Содержание

1	Базовые тригонометрические факты	2
1.1	Табличные значения тригонометрических функций	2
1.2	Формулы приведения	2
1.3	Наиболее распространенные тригонометрические формулы	4
	Основные тождества	4
	Формулы сложения углов	4
	Формулы двойного и тройного углов	4
	Формулы понижения степени	4
	Формулы произведения функций	5
	Формулы суммы/разности функций	5
	Выражение синуса и косинуса через тангенс половинного угла	5
	Формула вспомогательного аргумента	5
1.4	Элементарные тригонометрические уравнения	6
2	Виды тригонометрических уравнений	6
2.1	Квадратные тригонометрические уравнения	6
2.2	Кубические тригонометрические уравнения	7
2.3	Однородные тригонометрические уравнения второй степени	8
2.4	Однородные тригонометрические уравнения первой степени	9
2.5	Неоднородные тригонометрические уравнения первой степени	9
2.6	Формулы сокращенного умножения в тригонометрическом варианте	10
3	Отбор корней	10
3.1	Геометрический способ (по окружности)	10
3.2	Вычислительный способ	11
3.3	Алгебраический способ (двойное неравенство)	12

1 Базовые тригонометрические факты

1.1 Табличные значения тригонометрических функций

Таблица синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов углов из первой четверти:

	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

1.2 Формулы приведения

Пользуясь периодичностью функций $\sin$ и $\cos$, мы можем упрощать их аргументы по следующим формулам:

$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$
$\sin(2\pi \pm \alpha) = \pm \sin \alpha$	$\cos(2\pi \pm \alpha) = \cos \alpha$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm \sin \alpha$

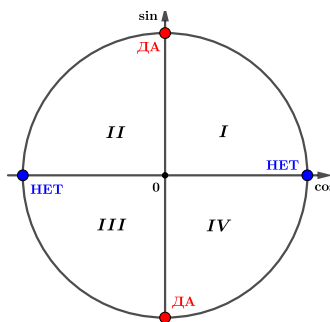
Обобщенный алгоритм действий для упрощения аргумента.

Сразу же для наглядности будем применять алгоритм для упрощения $\cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$, где $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.

1. Приведем аргумент к виду $\beta + \alpha$, где $\beta = k \cdot \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$. Фактически выделим часть "кратную" $\frac{\pi}{2}$.

В нашем частном случае аргумент $\frac{7\pi}{2} + \alpha$ уже в нужном виде.

2. Рассматриваем часть $\beta = k \cdot \frac{\pi}{2}$ аргумента. Если соответствующий угол β попадает в точку, отмеченную "ДА" на единичной окружности, то нужно поменять функцию на кофункцию, если в точку "НЕТ" — функция сохранится.

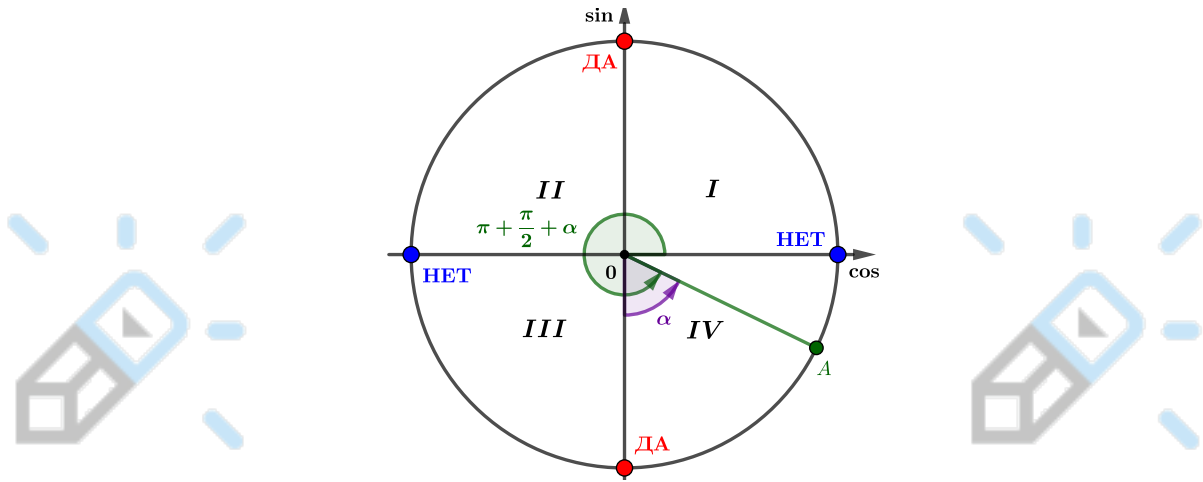


Несложно видеть, что $\frac{7\pi}{2} = 3\pi + \frac{\pi}{2} = 3\pi + \frac{\pi}{2}$ попадает в "ДА". Имеем ($\bullet$ означает, что со знаком мы еще не определились):

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = \bullet \sin \alpha$$

3. Знак будет такой же, как у **исходной** функции с аргументом $\beta + \alpha$, его тоже легко определяем на круге.

Очевидно, что $\cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Найдем угол $\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha$ на круге и определим знак, который там имеет исходная функция — в нашем случае это $\cos$.



По картинке очевидно, что проекция точки A на горизонтальную ось косинусов положительна, значит
• обращается в $+$. Итого получили:

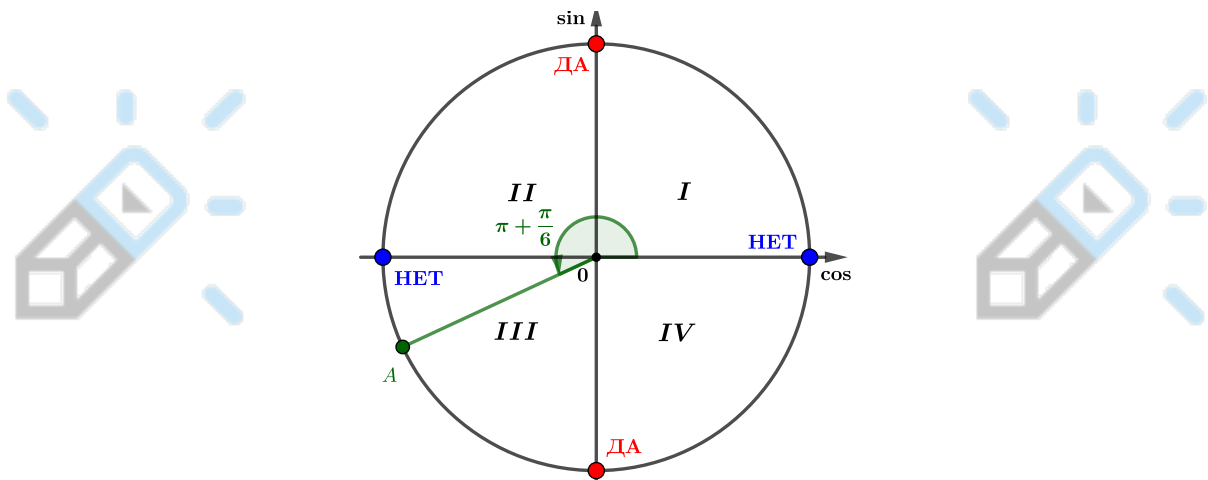
$$\cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = +\sin \alpha = \sin \alpha$$

Далее разберем еще один пример.

Пример Пусть нам дан $\sin \frac{31\pi}{6}$. Приведем к удобному нам виду:

$$\sin \frac{31\pi}{6} = \sin\left(5\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

В роли β у нас 5π , а $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Очевидно, что 5π попадает в "НЕТ". Значит, итоговая функция будет синусом как и исходная. Знак итоговой будет равен знаку $\sin\left(5\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$, то есть минусу.



Получим

$$\sin \frac{31\pi}{6} = \sin\left(5\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

■

1.3 Наиболее распространенные тригонометрические формулы

Основные тождества

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ ($\sin \alpha \neq 0, \cos \alpha \neq 0$)
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ($\cos \alpha \neq 0$)	$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ($\sin \alpha \neq 0$)

Формулы сложения углов

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \sin \beta \cdot \cos \alpha$	$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$
$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$ $\cos \alpha \cos \beta \neq 0, \cos(\alpha \pm \beta) \neq 0$	$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = -\frac{1 \mp \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta}$ $\sin \alpha \sin \beta \neq 0, \sin(\alpha \pm \beta) \neq 0$

Формулы двойного и тройного углов

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$	$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ $\cos \alpha \neq 0, \cos 2\alpha \neq 0$	$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$ $\sin \alpha \neq 0, \sin 2\alpha \neq 0$
$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$	$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

Формулы понижения степени

$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$	$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
--	--

Формулы произведения функций

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \left(\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) \right)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left(\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta) \right)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left(\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta) \right)$$

Формулы суммы/разности функций

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \cos \alpha \cos \beta \neq 0$	$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \pm \frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \sin \alpha \sin \beta \neq 0$

Выражение синуса и косинуса через тангенс половинного угла

$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$
$\cos \alpha \neq 0$	$\cos \alpha \neq 0$

Формула вспомогательного аргумента

Частный случай
$\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin \left(\alpha \pm \frac{\pi}{4} \right)$
$\sqrt{3} \sin \alpha \pm \cos \alpha = 2 \sin \left(\alpha \pm \frac{\pi}{6} \right)$
$\sin \alpha \pm \sqrt{3} \cos \alpha = 2 \sin \left(\alpha \pm \frac{\pi}{3} \right)$
Общий случай
$a \sin \alpha \pm b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin (\alpha \pm \phi), \quad \cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

1.4 Элементарные тригонометрические уравнения

Стандартные (простейшие) тригонометрические уравнения — это уравнения вида

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = b, \quad \operatorname{ctg} x = b,$$

которые имеют смысл при $-1 \leq a \leq 1$, $b \in \mathbb{R}$.

Их решения в общем случае выглядят следующим образом:

Уравнение	Ограничения	Решение
$\sin x = a$	$-1 \leq a \leq 1$	$\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi n \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$	$-1 \leq a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = b$	$b \in \mathbb{R}$	$x = \operatorname{arctg} b + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = b$	$b \in \mathbb{R}$	$x = \operatorname{arcctg} b + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

2 Виды тригонометрических уравнений

2.1 Квадратные тригонометрические уравнения

Если после преобразования уравнение приняло следующий вид:

$$af^2(x) + bf(x) + c = 0,$$

где $a \neq 0$, $f(x)$ — одна из функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, то такое уравнение с помощью замены $f(x) = t$ сводится к квадратному уравнению.

Часто при решении таких уравнений используются [основные тождества](#) и [формулы двойного угла](#).

Пример 1 Решить уравнение $5 \sin 2x = \cos 4x - 3$.

С помощью формулы двойного угла для косинуса $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ имеем:

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x$$

Сделаем эту подстановку и получим:

$$2 \sin^2 2x + 5 \sin 2x + 2 = 0$$

Сделаем замену $t = \sin 2x$. Т.к. область значений синуса $\sin 2x \in [-1; 1]$, то $t \in [-1; 1]$. Получим уравнение:

$$2t^2 + 5t + 2 = 0$$

Корни данного уравнения $t_1 = -2$, $t_2 = -\frac{1}{2}$. Таким образом, корень t_1 не подходит. Сделаем обратную замену:

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{12} + \pi n, x_2 = -\frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

■

Пример 2 Решить уравнение $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x + 4 = 0$.

Т.к. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$, то $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$. Сделаем замену $\operatorname{tg} x = t$. Т.к. область значений тангенса $\operatorname{tg} x \in \mathbb{R}$, то $t \in \mathbb{R}$. Получим уравнение:

$$t + \frac{3}{t} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{t^2 + 4t + 3}{t} = 0$$

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Таким образом:

$$\begin{cases} t^2 + 4t + 3 = 0 \\ t \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -3 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = -3 \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\arctg 3 + \pi n \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

■

2.2 Кубические тригонометрические уравнения

Если после преобразования уравнение приняло следующий вид:

$$af^3(x) + bf^2(x) + cf(x) + d = 0,$$

где $a \neq 0$, $f(x)$ — одна из функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, то такое уравнение с помощью замены $f(x) = t$ сводится к кубическому уравнению.

Часто при решении таких уравнений в дополнение к предыдущим формулам используются [формулы тройного угла](#).

Пример 3 Решить уравнение $11 \cos 2x - 3 = 3 \sin 3x - 11 \sin x$.

При помощи формул $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ и $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ данное уравнение можно свести к уравнению только с $\sin x$:

$$12 \sin^3 x - 9 \sin x + 11 \sin x - 3 + 11 - 22 \sin^2 x = 0$$

Сделаем замену $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$:

$$6t^3 - 11t^2 + t + 4 = 0$$

Подбором находим, что один из корней равен $t_1 = 1$. Выполнив деление в столбик многочлена $6t^3 - 11t^2 + t + 4$ на $t - 1$, получим:

$$(t - 1)(2t + 1)(3t - 4) = 0$$

Корнями являются $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$, $t_3 = \frac{4}{3}$

Таким образом, корень t_3 не подходит. Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

■

2.3 Однородные тригонометрические уравнения второй степени

Общий вид (I)

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0, \quad a \neq 0, c \neq 0$$

Заметим, что в данном уравнении **никогда** не являются решениями те значения x , при которых $\cos x = 0$ или $\sin x = 0$. Действительно, если $\cos x = 0$, то, подставив вместо косинуса ноль в уравнение, получим: $a \sin^2 x = 0$, откуда следует, что и $\sin x = 0$. Но это противоречит основному тригонометрическому тождеству, т.к. оно говорит о том, что если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$.

Аналогично и $\sin x = 0$ не является решением такого уравнения.

Значит, данное уравнение можно делить на $\cos^2 x$ или на $\sin^2 x$. Разделим, например, на $\cos^2 x$:

$$a \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} + c \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$$

Таким образом, данное уравнение при помощи деления на $\cos^2 x$ и замены $t = \operatorname{tg} x$ сводится к квадратному уравнению:

$$at^2 + bt + c = 0,$$

способ решения которого нам известен.

Уравнения вида

$$I'. \quad a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d, \quad a \neq 0, c \neq 0$$

с легкостью сводятся к уравнению вида I с помощью использования основного тригонометрического тождества:

$$d = d \cdot 1 = d \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

Пример 4 Решить уравнение $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x = 3 \cos^2 x + 1$

Подставим вместо 1 выражение $\sin^2 x + \cos^2 x$ и получим:

$$\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 0$$

Разделим полученное уравнение на $\cos^2 x$:

$$\operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 4 = 0$$

и сделаем замену $t = \operatorname{tg} x$, $t \in \mathbb{R}$. Уравнение примет вид:

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

Корнями являются $t_1 = -4$, $t_2 = 1$. Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \operatorname{tg} x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = -\operatorname{arctg} 4 + \pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

■

2.4 Однородные тригонометрические уравнения первой степени

Общий вид

$$a \sin x + b \cos x = 0, \quad a \neq 0, b \neq 0$$

Заметим, что в данном уравнении никогда не являются решениями те значения x , при которых $\cos x = 0$ или $\sin x = 0$. Действительно, если $\cos x = 0$, то, подставив вместо косинуса ноль в уравнение, получим: $a \sin x = 0$, откуда следует, что и $\sin x = 0$. Но это противоречит основному тригонометрическому тождеству, т.к. оно говорит о том, что если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$.

Аналогично и $\sin x = 0$ не является решением такого уравнения.

Значит, данное уравнение можно делить на $\cos x$ или на $\sin x$.

Разделим, например, на $\cos x$:

$$a \frac{\sin x}{\cos x} + b \frac{\cos x}{\cos x} = 0,$$

откуда имеем

$$a \operatorname{tg} x + b = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$$

Пример 5 Решить уравнение $\sin x + \cos x = 0$.

Разделим правую и левую части уравнения на $\sin x$:

$$1 + \operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

■

2.5 Неоднородные тригонометрические уравнения первой степени

Общий вид

$$a \sin x + b \cos x = c, \quad a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$$

Рассмотрим способ решения при помощи **формулы вспомогательного угла**.

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \phi), \quad \text{где } \cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Для использования данной формулы нам понадобятся **формулы сложения углов**.

Пример 6 Решить уравнение $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = -1$.

Т.к. мы решаем уравнение, то можно не преобразовывать левую часть, а просто разделить обе части уравнения на $\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$:

$$\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

Заметим, что числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ получились табличные. Можно, например, взять $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$. Тогда уравнение примет вид:

$$\sin 2x \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$$

Решениями данного уравнения являются:

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \pi n \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

■

2.6 Формулы сокращенного умножения в тригонометрическом варианте

Следующие формулы бывают полезны для сведения уравнения к одному из вышеуказанных видов:

1. Квадрат суммы или разности

$$(\sin x \pm \cos x)^2 = \sin^2 x \pm 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) \pm 2 \sin x \cos x = 1 \pm \sin 2x$$

2. Разность квадратов

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

3. Сумма или разность кубов

$$\sin^3 x \pm \cos^3 x = (\sin x \pm \cos x)(\sin^2 x \mp \sin x \cos x + \cos^2 x) = (\sin x \pm \cos x)(1 \mp \sin x \cos x)$$

4. Куб суммы или разности

$$(\sin x \pm \cos x)^3 = (\sin x \pm \cos x)(\sin x \pm \cos x)^2 = (\sin x \pm \cos x)(1 \pm \sin 2x)$$

3 Отбор корней

3.1 Геометрический способ (по окружности)

Этот способ заключается в том, что мы отмечаем решения всех уравнений (неравенств) на единичной окружности и пересекаем (объединяем) их.

Пример 1 Найти корни уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$, если $\cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

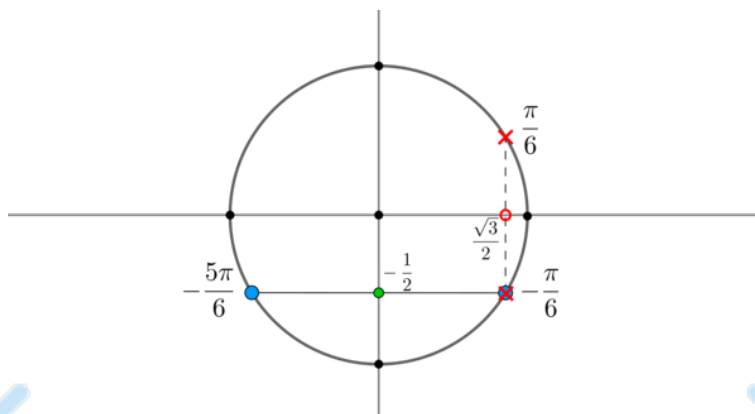
В данном случае необходимо пересечь решения первого уравнения с решением второго уравнения. Решением первого уравнения являются

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

решением второго являются

$$x \neq \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отметим эти точки на окружности:



Видим, что из двух точек, удовлетворяющих первому уравнению, одна точка $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ не подходит. Следовательно, ответом будут только $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. ■

3.2 Вычислительный способ

Этот способ заключается в подстановке решений уравнения (системы) в имеющиеся ограничения. Для данного способа будут полезны некоторые частные случаи формул приведения:

$$\sin(\alpha + \pi n) = \begin{cases} \sin \alpha, & \text{при } n - \text{четном} \\ -\sin \alpha, & \text{при } n - \text{нечетном} \end{cases}$$

$$\cos(\alpha + \pi n) = \begin{cases} \cos \alpha, & \text{при } n - \text{четном} \\ -\cos \alpha, & \text{при } n - \text{нечетном} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} \alpha$$

Пример 2 Решить систему

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x + \cos x > 0 \end{cases}$$

Решением уравнения являются

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Подставим в неравенство $\sin x + \cos x > 0$ по очереди оба корня:

$$\sin x_1 + \cos x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} > 0,$$

следовательно, корень x_1 нам подходит;

$$\sin x_2 + \cos x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} < 0,$$

следовательно, корень x_2 нам не подходит.

Таким образом, решением системы являются только

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

■

3.3 Алгебраический способ (двойное неравенство)

Пример 3 Найти корни уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

Решением уравнения являются

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Для того, чтобы отобрать корни, решим два неравенства: $0 \leq x_1 \leq \pi$ и $0 \leq x_2 \leq \pi$:

$$0 \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{8} \leq n \leq \frac{3}{8}$$

Таким образом, единственное целое значение n , удовлетворяющее этому неравенству, это $n = 0$. При этом $x_1 = \frac{\pi}{4}$ — входит в отрезок $[0; \pi]$.

Аналогично решаем неравенство $0 \leq x_2 \leq \pi$ и получаем $n = 0$ и $x_2 = \frac{3\pi}{4}$.

■