План решения №11

1. Взять производную функции, т.е. найти $f'(x)$.
2. Найти все точки, в которых производная равна нулю, либо не существует.
3. Найти знаки производной на промежутках между ее нулями с помощью метода интервалов.
4. Нарисовать эскиз графика исходной функции (изобразить, на каком промежутке функция ворастает, а на каком убывает) и с его помощью найти точку или значение, которое требуется в задаче.

Пример решения задачи в соответствии с планом

Найдите наибольшее значение функции $y = e^{x-2} \cdot \dfrac{x-4}{x}$ на отрезке $[1;4]$.

Решение

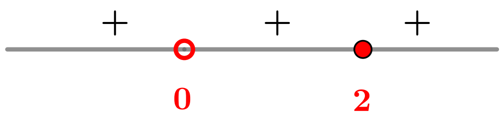
Обозначим $f(x) = e^{x-2} \cdot \dfrac{x-4}{x}$.

1. Найдем производную функции:

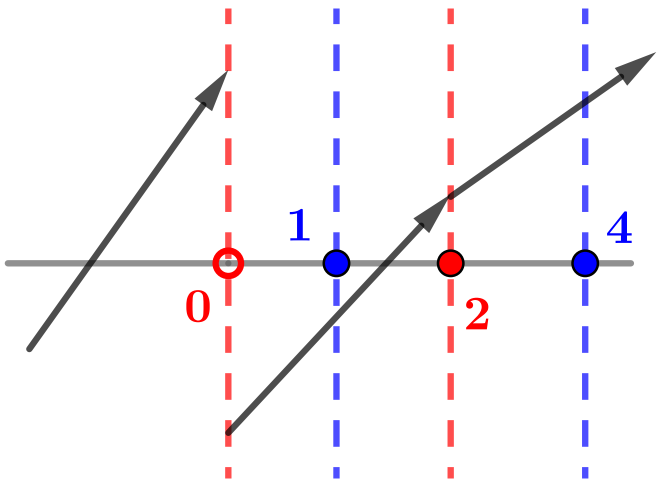
$$f'(x) = \left(e^{x-2}\right)' \cdot \frac{x-4}{x} + e^{x-2} \cdot \left(\frac{x-4}{x}\right)' = e^{x-2} \cdot \frac{x-4}{x} + e^{x-2} \cdot \frac{(x-4)'x-(x-4)x'}{x^2} = e^{x-2} \cdot \frac{(x-2)^2}{x^2}$$

2. Легко видеть, что первый множитель определен и не равен нулю при любом $x \in \mathbb{R}$. Второй множитель зануляется при $x = 2$ и не определен при $x = 0$.

3. Применим метод интервалов для определения знаков производной. Обе критические точки встречаются в четном числе множителей, следовательно, знак в них меняться не будет.



4. Теперь можем нарисовать эскиз графика. На всех промежутках производная положительна, т.е. исходная функция будет возрастать (не забываем, что в точке 0 будет разрыв, в ней функция не определена). Выделим на эскизе интересующий нас отрезок $[1;4]$.



На полученном эскизе отлично видно, что на всем отрезке $[1;4]$ исходная функция f всюду определена и возрастает, следовательно, максимальное значение на отрезке достигается самой правой его точке $x = 4$. Чтобы решить задачу, осталось найти значение f в точке $x = 4$:

$$f(4) = e^{4-2} \cdot \frac{4-4}{4} = 0.$$