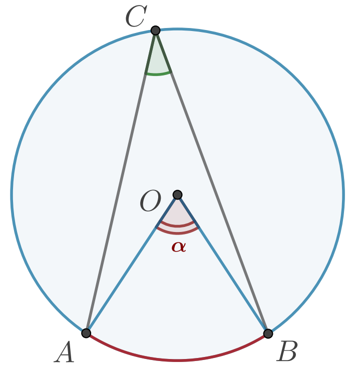
Полный конспект интенсива Школково по №1,16 из ЕГЭ

Содержание

1 Центральные и вписанные углы

Центральный угол

Центральным углом называется угол с вершиной в центре окружности. Пусть точки A и B лежат на окружности с центром в точке O. Тогда угол AOB — центральный.



Градусная мера дуги

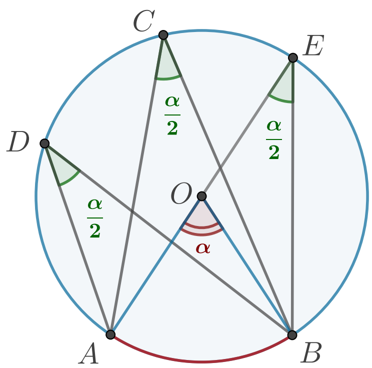
Пусть $\angle AOB = \alpha$. Градусной мерой дуги AB будем называть градусную меру центрального угла, который опирается на эту дугу. Тогда

$$\overset{\smile}{AB} = \alpha$$

Вписанный угол

Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на окружности, а его стороны пересекают эту окружность.
Угол ACB — вписанный.

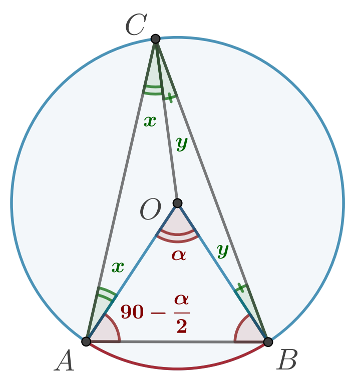
Факт №1



Все вписанные углы, опирающиеся на дугу AB, равны половине центрального угла, опирающегося на эту дугу.

Доказательство
Проведем OC. Тогда $AO = BO = CO$ как радиусы окружности, значит, треугольники AOC, BOC и AOB — равнобедренные. Тогда углы при их основаниях попарно равны.
Пусть $\angle OAC = \angle OCA = x$ и $\angle OBC = \angle OCB = y$.
В треугольнике AOB $\angle AOB = \alpha$. Тогда

$$\angle OAB = \angle OBA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

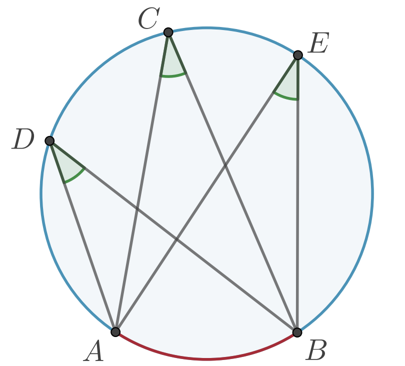


Сумма углов треугольника ABC равна

$$2x + 2y + 180^\circ - \alpha = 180^\circ \quad \Rightarrow \quad x + y = \frac{\alpha}{2}$$

Таким образом, вписанный угол ACB равен половине угла AOB.
Здесь мы разобрали не все случаи расположения точки C, так как мы пользовались тем, что точка O лежит внутри угла ACB, что не всегда так. Доказательство в других случаях аналогично.

Следствия из факта №1

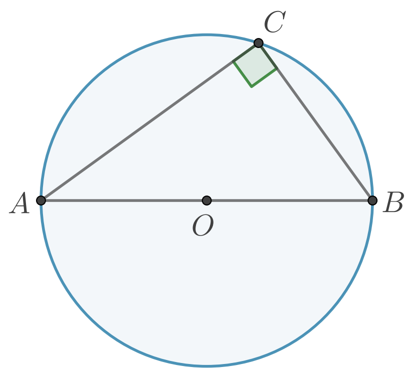


Следствие №1

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

Доказательство

Из факта №1 следует, что вписанный угол, опирающийся на дугу, равен половине центрального угла, опирающегося на эту же дугу, а значит равен и половине градусной меры этой дуги. Таким образом, все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.



Следствие №2

Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, равен 90°.

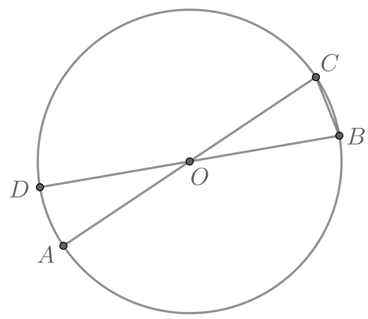
Доказательство

Действительно, такой угол опирается на дугу, градусная мера которой равна 180°, следовательно, он равен

$$\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Задачи на факт №1 и его следствия

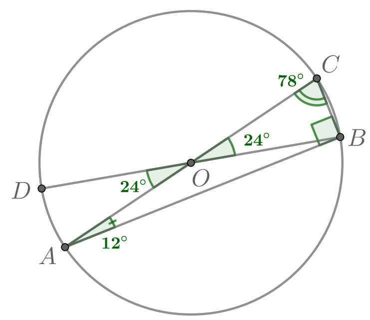
Задача №1. В окружности с центром O отрезки AC и BD — диаметры. Центральный угол AOD равен 24°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.



Ответ

78

Решение



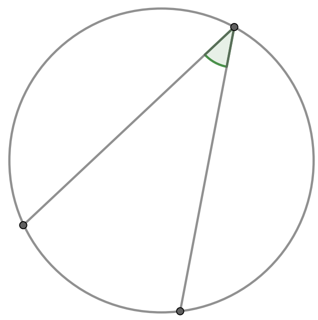
Проведем AB. AC — диаметр, значит, $\angle ABC = 90^\circ$.
Угол BAC — вписанный, опирающийся на дугу BC, тогда он равен половине центрального угла BOC.
Углы AOD и BOD равны как вертикальные, следовательно,

$$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2} \cdot 24^\circ = 12^\circ$$

Тогда по сумме углов треугольника ABC

$$\angle ACB = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 12^\circ = 78^\circ$$

Задача №2. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна $\frac{1}{5}$ длины окружности. Ответ дайте в градусах.



Ответ

36

Решение

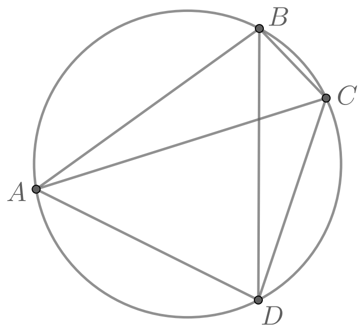
Градусная мера всей окружности равна $360°$, тогда данный нам вписанный угол опирается на дугу, градусная мера которой равна

$$360° \cdot \frac{1}{5} = 72°$$

Вписанный угол равен половине дуги, на которую опирается, то есть равен

$$72° \cdot \frac{1}{2} = 36°$$

Задача №3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен $98°$, угол CAD равен $44°$. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



Ответ

54

Решение

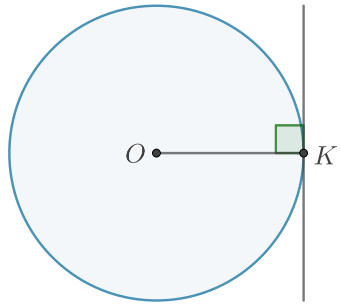
Так как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны, то

$$\angle CAD = \angle DBC,$$

поскольку эти углы опираются на дугу CD. Тогда имеем:

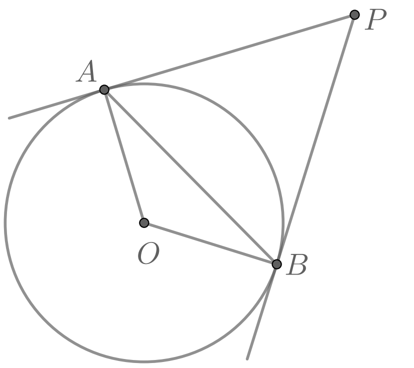
$$\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = \angle ABC - \angle CAD = 98° - 44° = 54°$$

2 Касательные



Факт №2

Радиус, проведенный к точке касания, перпендикулярен касательной.



Задача на факт №2

Задача №4. Касательные в точках A и B к окружности с центром в точке O пересекаются под углом $56°$. Найдите угол ABO. Ответ дайте в градусах.

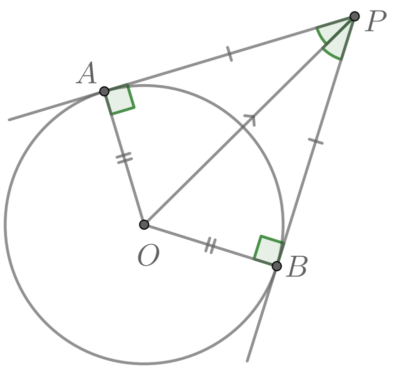
Ответ

28

Решение

По факту №2

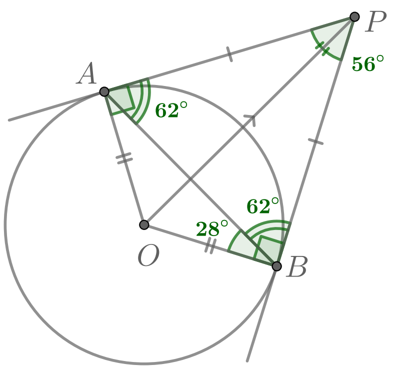
$$\angle OAP = \angle OBP = 90°$$



Отрезки OA и OB равны как радиусы. Тогда прямоугольные треугольники APO и BPO равны по катету и общей гипотенузе PO. В равных треугольниках соответственные элементы равны, значит, $AP = BP$ и $\angle APO = \angle BPO$.

Важный факт

Таким образом, мы доказали еще один факт — отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.



Продолжение решения

По доказанному треугольник ABP равнобедренный, поэтому

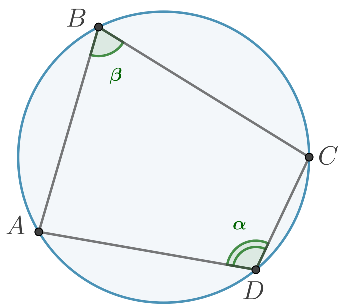
$$\angle PAB = \angle PBA = \frac{1}{2}(180° - 56°) = 62°$$

Тогда

$$\angle ABO = 90° - \angle PBA = 90° - 62° = 28°$$

Про вписанный четырехугольник

Вписанный четырехугольник — это четырехугольник, все вершины которого лежат на одной окружности.



Свойство №1

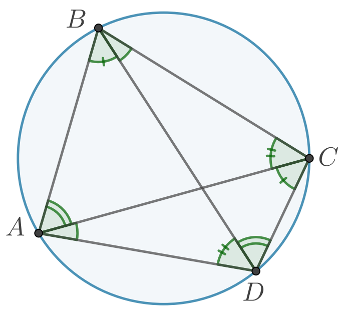
Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°.

Доказательство

Рассмотрим вписанный четырехугольник $ABCD$.

Пусть $\angle ADC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Тогда угол α равен половине дуги ABC, а угол β — половине дуги ADC, значит,

$$\alpha + \beta = \frac{\overset{\smile}{ABC}}{2} + \frac{\overset{\smile}{ADC}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$



Признак №1

Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то вокруг него можно описать окружность.

Доказывается этот факт с помощью рассуждений от противного. Предлагаем читателям провести их самостоятельно.

Свойство №2

Если четырехугольник вписанный, то углы, опирающиеся на одну сторону, равны

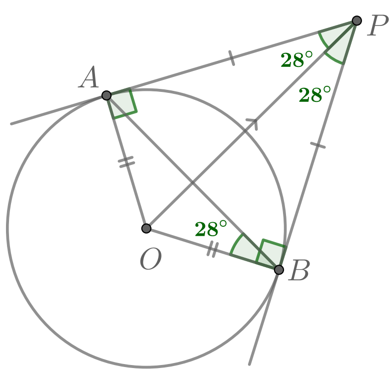
Признак №2

Если в четырехугольнике углы, опирающиеся на одну сторону, равны, то он вписанный.

Решение задачи на факт №2 через вписанный четырехугольник

По факту №2

$$\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$$



Тогда в четырехугольнике $AOBP$ сумма противоположных углов OAP и OBP равна 180°, значит, $AOBP$ — вписанный.

Отрезки OA и OB равны как радиусы. Тогда прямоугольные треугольники APO и BPO равны по катету и общей гипотенузе PO.

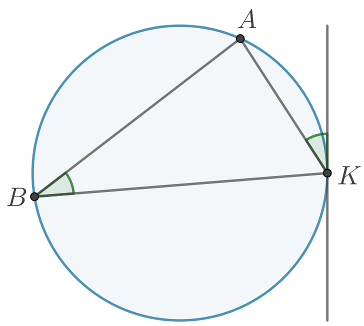
В равных треугольниках соответственные элементы равны, значит, $\angle APO = \angle BPO$. Тогда

$$\angle APO = \angle BPO = \frac{1}{2}\angle APB = 28^\circ$$

Во вписанном четырехугольнике $AOBP$ углы ABO и APO опираются на одну сторону, значит,

$$\angle ABO = \angle APO = 28^\circ$$

Факт №3



Угол между хордой и касательной равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, отсеченную хордой.

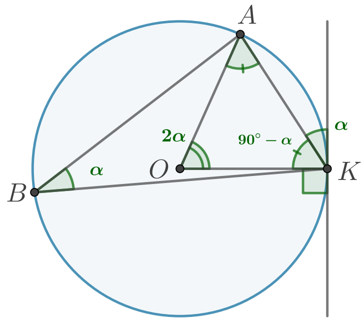
Доказательство

Пусть угол между касательной и хордой равен α, а точка O — центр окружности. Тогда радиус OK перпендикулярен касательной, следовательно,

$$\angle OKA = 90^\circ - \alpha$$

Отрезки OA и OK равны как радиусы, значит, $\triangle OAK$ — равнобедренный, то есть

$$\angle OAK = \angle OKA = 90^\circ - \alpha \quad \Rightarrow \quad \angle KOA = 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \angle ABK = \alpha$$



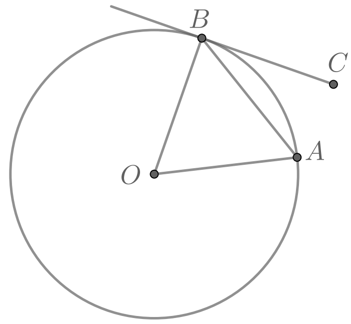
Задача на факт №3

Задача №5. Угол между хордой AB и касательной BC к окружности равен 32°. Найдите величину меньшей дуги, стягиваемой хордой AB. Ответ дайте в градусах.

Ответ

64

Решение



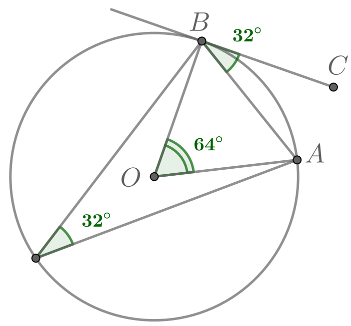
По факту №3 $\angle CBA$ равен вписанному углу, опирающемуся на $\overset{\smile}{AB}$. Вписанный угол, опирающийся на дугу $\overset{\smile}{AB}$, равен половине центрального угла, опирающегося на эту дугу. Тогда

$$\angle CBA = \frac{1}{2}\angle BOA$$

Градусная мера дуги равна центральному углу, который опирается на эту дугу, то есть

$$\angle BOA = \overset{\smile}{AB}$$

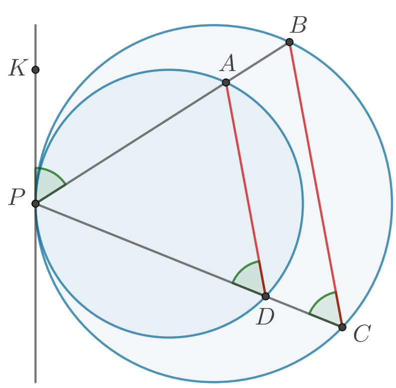
Найдем градусную меру $\overset{\smile}{AB}$:



$$\overset{\smile}{AB} = \angle BOA = 2\angle CBA = 2 \cdot 32^\circ = 64^\circ$$

Значит, градусная мера меньшей дуги, стягиваемой хордой AB равна 64°.

Конструкция для №16 из ЕГЭ



Пусть есть две окружности, касающиеся внутренним образом в точке P. Проведем две произвольные хорды PB и PC большей окружности. Пусть они пересекают меньшую в точках A и D соответственно. Тогда $AD \parallel BC$.

Доказательство

Проведем общую касательную PK. Тогда по факту №3

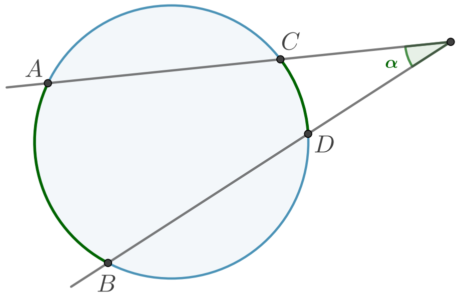
$$\angle KPA = \angle ADP \text{ и } \angle KPB = \angle BCP$$

Углы KPA и KPB равны, значит,

$$\angle ADP = \angle BCP \quad \Rightarrow \quad AD \parallel BC$$

3 Секущие, хорды и углы между ними

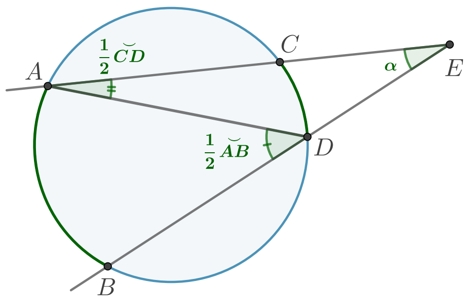
Факт №4



Угол между секущими, проведенными из одной точки к окружности, равен полуразности дуг, заключенных между ними:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\breve{AB} - \breve{CD}\right)$$

Доказательство



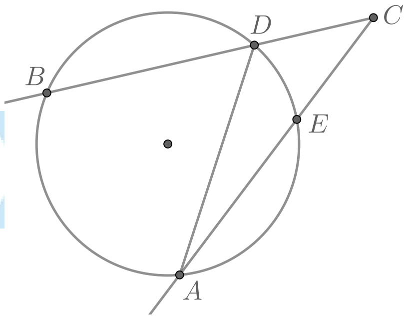
Проведем AD. По факту №1 мы можем найти углы ADB и CAD:

$$\angle ADB = \frac{1}{2}\breve{AB} \text{ и } \angle CAD = \frac{1}{2}\breve{CD}$$

Заметим, что $\angle ADB$ — внешний для $\triangle ADE$, тогда

$$\angle ADB = \angle CAD + \angle AEB \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}\left(\breve{AB} - \breve{CD}\right)$$

Задача на факт №4



Задача №6. Найдите угол ACB между секущими из точки C к окружности, если вписанные углы ADB и DAE опираются на дуги окружности с градусными мерами $118°$ и $38°$ соответственно. Ответ дайте в градусах.

Ответ

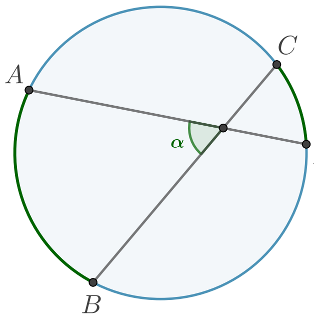
40

Решение

По факту №4

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\left(\breve{AB} - \breve{DE}\right) = \frac{1}{2}\cdot(118° - 38°) = \frac{1}{2}\cdot 80° = 40°$$

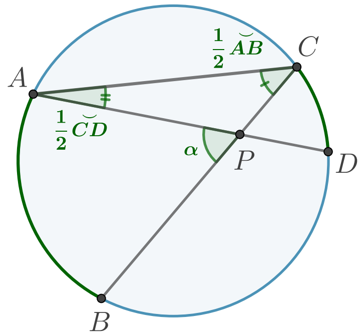
Факт №5



Угол между пересекающимися хордами окружности равен полусумме дуг, заключенных между ними:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\breve{AB} + \breve{CD}\right)$$

Доказательство



Проведем AC. По факту №1 мы можем найти углы ACB и CAD:

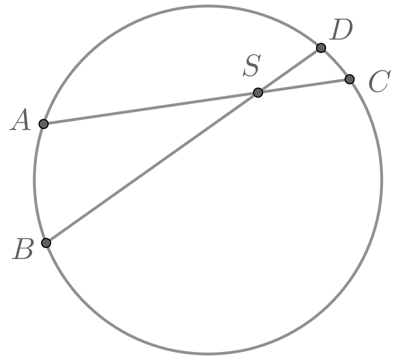
$$\angle ACB = \frac{1}{2}\breve{AB} \text{ и } \angle CAD = \frac{1}{2}\breve{CD}$$

Заметим, что $\angle APB$ — внешний для $\triangle APC$, тогда

$$\angle APB = \angle CAD + \angle ACB \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}\left(\breve{AB} + \breve{CD}\right)$$

Задача на факт №5

Задача №7. Хорды AC и BD пересекаются в точке S. Дуга AB, заключённая внутри угла ASB, равна $40°$, а дуга CD, заключённая внутри угла CSD, равна $14°$. Найдите $\angle ASB$. Ответ дайте в градусах.



Ответ

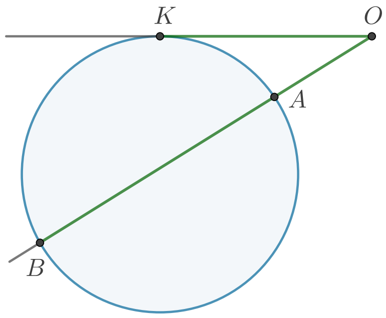
27

Решение

По факту №5

$$\angle ASB = \frac{1}{2}\left(\breve{AB} + \breve{CD}\right) = \frac{1}{2}\cdot(40° + 14°) = \frac{1}{2}\cdot 54° = 27°$$

4 Отношения касательных, секущих и хорд



Факт №6

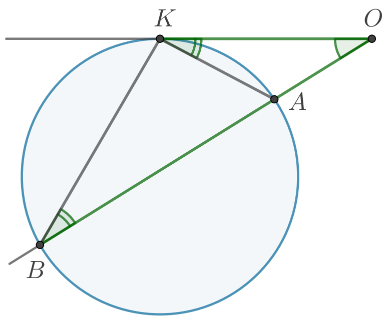
Квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть:

$$OK^2 = OA \cdot OB$$

Доказательство

По факту №3

$$\angle AKO = \frac{1}{2}\breve{AK} = \angle KBA$$

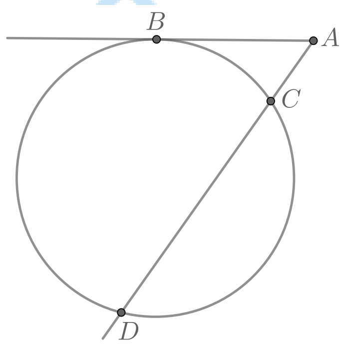


В треугольниках KOA и BOK $\angle AKO = \angle KBA$ и $\angle KOB$ — общий. Тогда $\triangle KOA \sim \triangle BOK$ по двум углам. Запишем отношение подобия:

$$\frac{KA}{BK} = \frac{KO}{BO} = \frac{OA}{OK} \quad \Rightarrow \quad OK^2 = OA \cdot OB$$

Задача на факт №6

Задача №8. Из точки A вне окружности проведена касательная AB и секущая AD, как показано на картинке. Найдите длину отрезка AC, если $CD = 14$, а $AB = 6\sqrt{2}$.



Ответ

4

Решение

Обозначим AC за x. Тогда

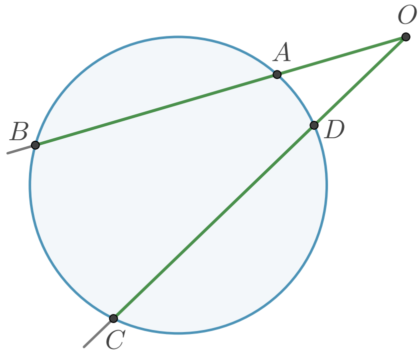
$$AD = AC + CD = x + 14$$

По факту №6

$$AB^2 = AC \cdot AD \quad \Rightarrow \quad 72 = 14x + x^2$$

Решим квадратное уравнение и получим $x_1 = 4$ и $x_2 = -18$. Из двух корней подходит только $x = 4$, так как длина — величина неотрицательная, поэтому $AC = 4$.

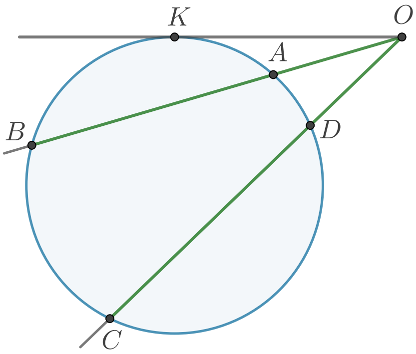
Факт №7



Для данной окружности и точки O вне окружности произведение секущей на ее внешнюю часть — величина постоянная:

$$OA \cdot OB = OD \cdot OC$$

Доказательство



Проведем касательную к окружности из точки O. Пусть она касается окружности в точке K.

По факту №6

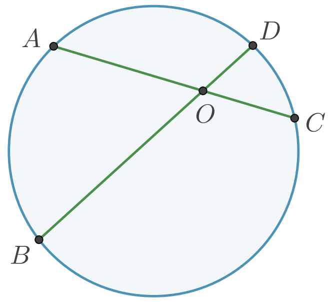
$$OK^2 = OA \cdot OB$$

$$OK^2 = OD \cdot OC$$

Тогда

$$OA \cdot OB = OD \cdot OC$$

Факт №8



Произведения отрезков пересекающихся хорд равны:

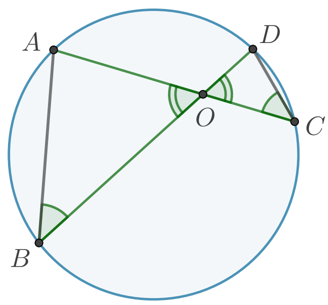
$$AO \cdot OC = BO \cdot OD$$

Доказательство

По факту №1

$$\angle ACD = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AD} = \angle ABD$$

Рассмотрим треугольники BOA и COD :



1. $\angle OCD = \angle OBA$;
2. $\angle AOB = \angle DOC$ как вертикальные.

Тогда $\triangle BOA \sim \triangle COD$ по двум углам. Запишем отношение подобия:

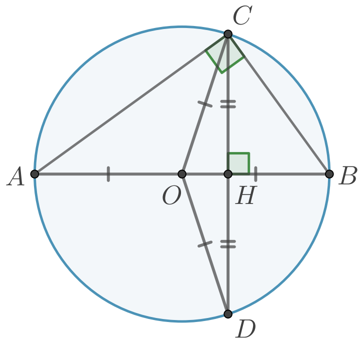
$$\frac{BO}{OC} = \frac{BA}{CD} = \frac{AO}{OD}$$

$$\frac{BO}{OC} = \frac{AO}{OD} \quad \Leftrightarrow \quad AO \cdot OC = BO \cdot OD$$

Высота прямоугольного треугольника

Опишем окружность около прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C. Тогда центр O этой окружности является серединой его гипотенузы.

Проведем высоту CH и продлим ее до пересечения с описанной окружностью в точке D. Тогда $CH = DH$, так как OH — высота, а значит и медиана в равнобедренном треугольнике COD. Значит, по факту №8 для хорд AB и CD верно, что



$$AH \cdot BH = CH \cdot DH \quad \Rightarrow \quad CH^2 = AH \cdot BH$$

5 Полезные конструкции

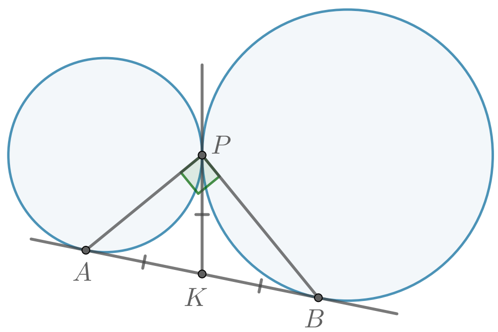
Окружности, касающиеся внешним образом

Пусть две окружности касаются внешним образом в точке P, а AB — их общая внешняя касательная. Тогда $\angle APB = 90^\circ$.

Доказательство

Проведем через точку P общую внутреннюю касательную к этим окружностям. Пусть она пересекает AB в точке K. Тогда заметим, что KA и KP — отрезки касательных, проведенные к окружности из одной точки, значит, $KA = KP$.

Аналогично $KB = KP$. Тогда в треугольнике APB PK — медиана, которая равна половине стороны, к которой проведена. Следовательно, $\triangle APB$ — прямоугольный, то есть $\angle APB = 90^\circ$.



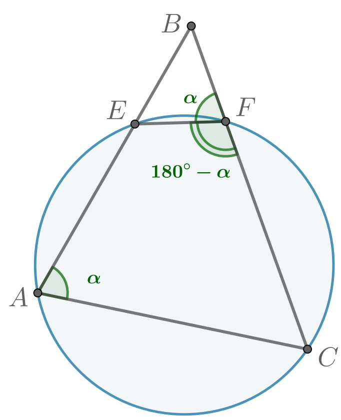
Отсеченный подобный треугольник

Пусть окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Тогда $\triangle ABC$ подобен $\triangle FBE$.

Доказательство

Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда так как $ACFE$ — вписанный четырехугольник, то $\angle EFC = 180^\circ - \alpha$. Значит, смежный ему угол BFE равен α.

Таким образом, треугольники ABC и FBE подобны по двум углам: $\angle BAC = \angle BFE = \alpha$ и $\angle ABC$ у них общий.

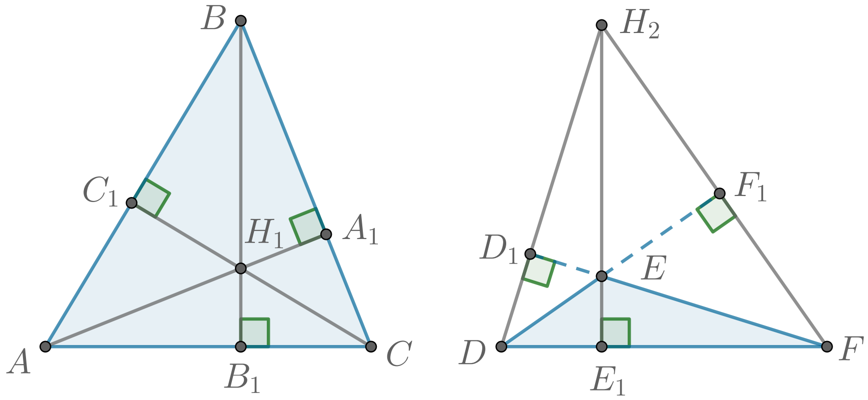


6 Элементарные свойства ортоцентра

Что такое ортоцентр?

Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC, H — их точка пересечения. Точку H называют *ортоцентром* треугольника ABC, а треугольник $A_1B_1C_1$ — *ортотреугольником.*

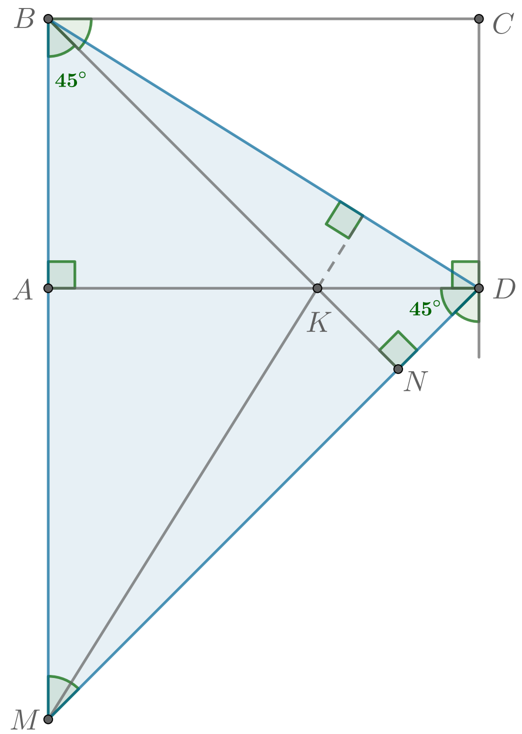
Рассмотрим остроугольный треугольник ABC. Каждая из высот этого треугольника лежит внутри него, а значит и точка пересечения высот лежит внутри треугольника. Если же мы возьмем тупоугольный треугольник DEF, то две высоты, опущенные из вершин острых углов, будут проходить вне треугольника и пересекать продолжения сторон. Тогда эти высоты пересекутся вне треугольника, следовательно, и ортоцентр будет лежать снаружи.



Задача №1

В прямоугольнике $ABCD$ биссектрисы угла B и внешнего угла D пересекают сторону AD и прямую AB в точках K и M соответственно. Докажите, что отрезок KM перпендикулярен диагонали BD прямоугольника.

Решение



Рассмотрим треугольник MBD. В нем DA — высота, так как $DA \perp AB$.

Докажем, что $BK \perp DM$. По условию DM — биссектриса внешнего угла D прямоугольника, значит, $\angle ADM = 45°$. Также BK — биссектриса угла B прямоугольника, значит, $\angle ABK = 45°$.

По сумме углов треугольника ADM имеем:

$$\angle AMD = 180° - \angle MAD - \angle ADM = 180° - 90° - 45° = 45°$$

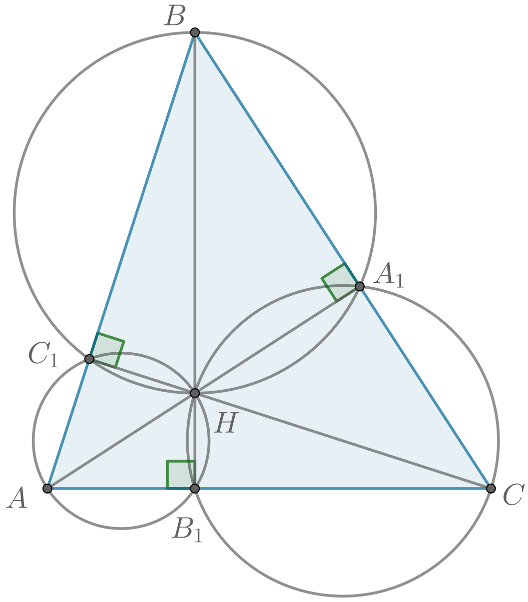
Пусть N — точка пересечения прямых DM и BK. Тогда по сумме углов треугольника BMN имеем:

$$\angle BNM = 180° - \angle BMN - \angle MBN = 180° - 45° - 45° = 90°$$

Тогда BN и DA — высоты треугольника MBD, пересекающиеся в точке K. Значит, MK — третья высота этого треугольника, то есть $MK \perp BD$. Что и требовалось доказать.

Свойство 1

Четырехугольники AC_1HB_1, BA_1HC_1, CB_1HA_1 являются вписанными.



Доказательство

Заметим, что $\angle AC_1H = \angle AC_1C = 90°$ и $\angle AB_1H = \angle AB_1B = 90°$, так как BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC.

Следовательно, $\angle AC_1H + \angle AB_1H = 180°$, значит, AC_1HB_1 — вписанный четырехугольник, так как сумма его противоположных углов равна 180°.

Четырёхугольник BA_1HC_1 является вписанным, так как сумма его противоположных углов равна

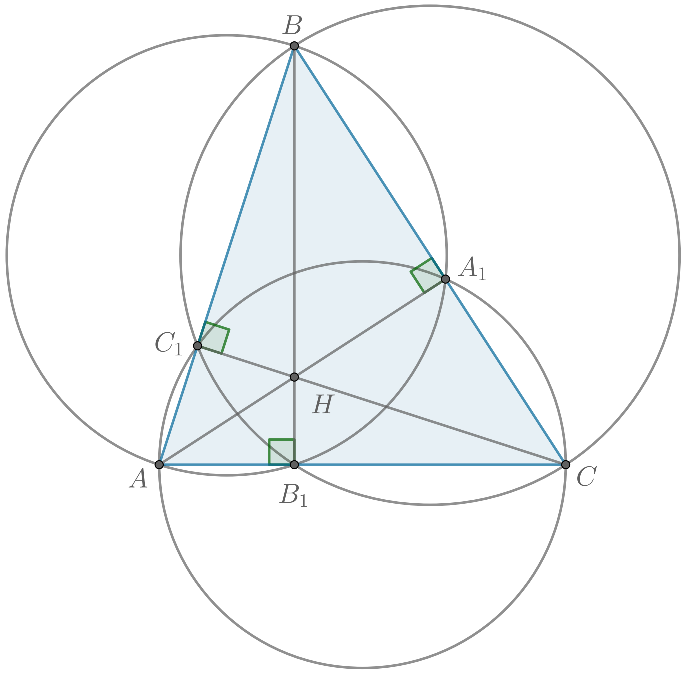
$$\angle BA_1H + \angle BC_1H = \angle BA_1A + \angle BC_1C = 90° + 90° = 180°$$

Четырёхугольник CB_1HA_1 является вписанным, так как сумма его противоположных углов равна

$$\angle CB_1H + \angle CA_1H = \angle CB_1B + \angle CA_1A = 90° + 90° = 180°$$

Свойство 2

Четырехугольники ABA_1B_1, BCB_1C_1, CAC_1A_1 являются вписанными.



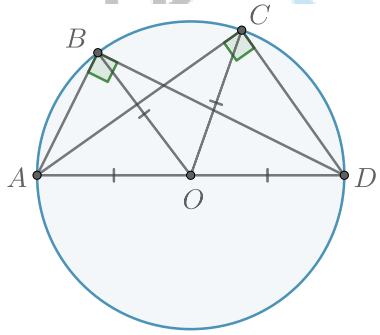
Доказательство

Заметим, что в четырёхугольнике ABA_1B_1 углы AA_1B и AB_1B, опирающиеся на сторону AB, равны 90°, значит, ABA_1B_1 — вписанный четырёхугольник.

В четырёхугольнике BCB_1C_1 углы $\angle BB_1C$ и $\angle BC_1C$, опирающиеся на сторону BC, равны 90°, значит, BCB_1C_1 — вписанный четырёхугольник.

В четырёхугольнике ACA_1C_1 углы $\angle AA_1C$ и $\angle AC_1C$, опирающиеся на сторону AC, равны 90°, значит, ACA_1C_1 — вписанный четырёхугольник.

Важная конструкция



Пусть есть два прямых угла ABD и ACD, которые опираются на одну сторону четырехугольника. Тогда четырехугольник $ABCD$ является вписанным. Но это не самое главное!

Центром O описанной окружности данного четырехугольника является середина AD, так как AD — диаметр описанной окружности. Тогда $AO = BO = CO = DO$ как радиусы.

Свойство 3

Точка H является точкой пересечения биссектрис ортотреугольника $A_1B_1C_1$.

Доказательство

Заметим, что ABA_1B_1 — вписанный четырёхугольник, так как $\angle AA_1B = \angle AB_1B = 90^\circ$, значит, его внешний угол CA_1B_1 равен противоположному внутреннему углу BAB_1.

Аналогично внешний угол BA_1C_1 вписанного четырёхугольника ACA_1C_1 равен его противоположному внутреннему углу C_1AC. Тогда имеем:

$$\angle CA_1B_1 = \angle BAB_1 = \angle BAC = \angle C_1AC = \angle BA_1C_1$$

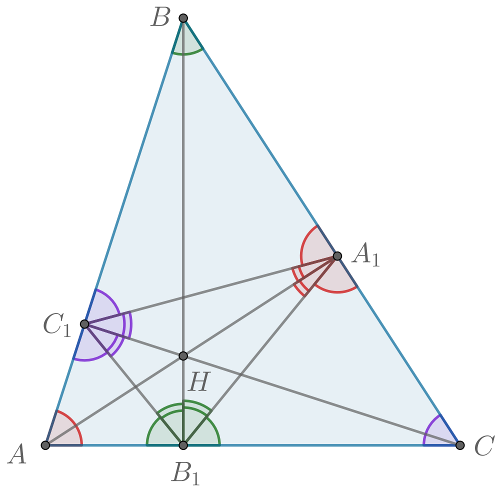
Заметим, что $\angle AA_1B = \angle AA_1C = 90^\circ$. Значит,

$$90^\circ - \angle BA_1C_1 = 90^\circ - \angle CA_1B_1 \quad \Leftrightarrow \quad \angle AA_1C_1 = \angle AA_1B_1$$

Таким образом, AA_1 — биссектриса угла $B_1A_1C_1$.

Аналогично мы можем получить, что BB_1 и CC_1 — биссектрисы углов $A_1B_1C_1$ и $A_1C_1B_1$ соответственно.

Следовательно, точка H является точкой пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$, то есть его инцентром.



7 Лемма об отражении ортоцентра

Точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно середины стороны, лежит на описанной окружности треугольника.

Доказательство

Пусть $\angle ABC = \beta$, $\angle CH_BA = \alpha$. Из симметрии $HM = H_BM$, значит, четырехугольник $AHCH_B$ — параллелограмм, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Следовательно,

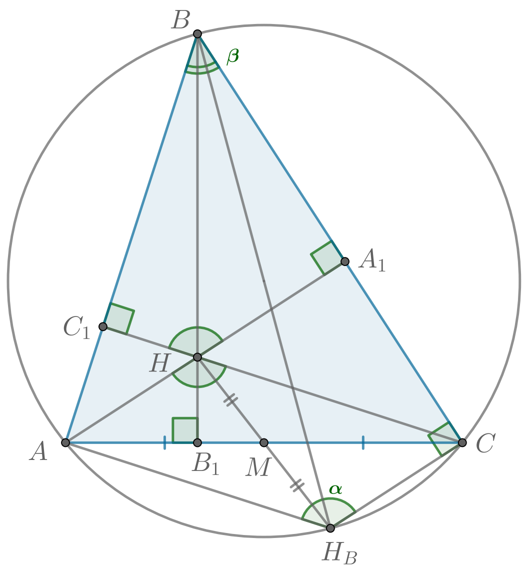
$$\angle AHC = \angle CH_BA = \alpha$$

Тогда $\angle A_1HC_1 = \angle AHC = \alpha$ как вертикальные.

BA_1HC_1 — вписанный четырёхугольник, значит,

$$180^\circ = \angle A_1HC_1 + \angle C_1BA_1 = \alpha + \beta = \angle CH_BA + \angle ABC$$

Таким образом, $ABCH_B$ — вписанный четырёхугольник, то есть H_B лежит на описанной окружности треугольника ABC.



Свойство 4

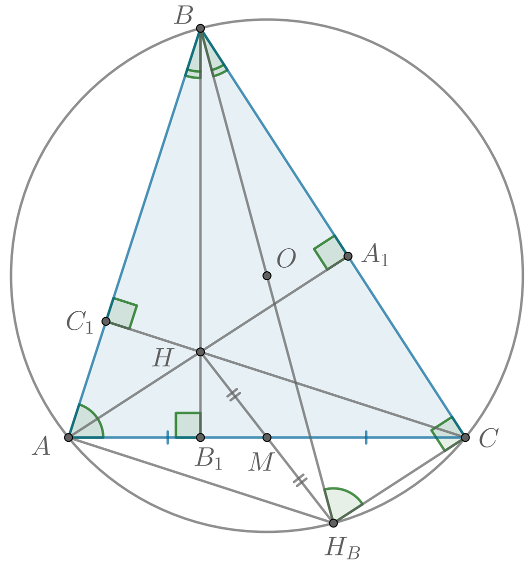
H_B диаметрально противоположна вершине B треугольника.

Доказательство

$AHCH_B$ — параллелограмм, следовательно, $AA_1 \parallel H_BC$, причем $AA_1 \perp BC$, значит, $H_BC \perp BC$. Значит, что $\angle BCH_B = 90^\circ$, то есть BH_B — диаметр описанной окружности треугольника ABC.

Свойство 5

Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Тогда $\angle ABH = \angle CBO$ (говорят, что точки O и H *изогональны*, то есть симметричны относительно биссектрисы угла $\angle ABC$).



Доказательство

Четырёхугольник $ABCH_B$ — вписанный, значит, $\angle BAC = \angle BH_BC$.

По предыдущему свойству $\angle BCH_B = 90^\circ$, а $\angle BB_1A = 90^\circ$, так как BB_1 — высота. Тогда треугольники ABB_1 и H_BBC подобны по двум углам, таким образом,

$$\angle ABB_1 = \angle H_BBC$$

Но мы знаем, что BH_B — диаметр, значит,

$$\angle ABH = \angle CBO$$

Задача №2

Около остроугольного треугольника ABC с различными сторонами описали окружность с диаметром BN. Высота BH пересекает эту окружность в точке K.

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите KN, если $\angle BAC = 35^\circ$, $\angle ACB = 65^\circ$, а радиус окружности равен 12.

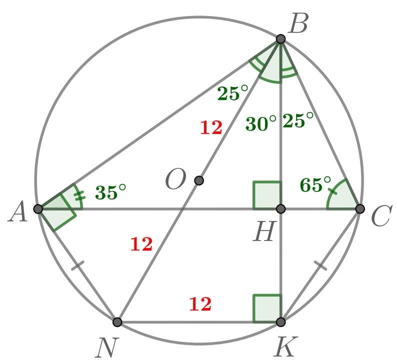
Решение

а) Нужно доказать, что хорды AN и CK равны. Так как равные дуги стягиваются равными хордами, достаточно показать, что дуги AN и CK равны. Поскольку дуги равны, если на них опираются равные вписанные углы, то докажем, что $\angle ABN = \angle KBC$.

По условию BN — диаметр описанной окружности треугольника ABC. Тогда $\angle NAB = 90^\circ$, так как он опирается на диаметр. Кроме того, $\angle BHC = 90^\circ$, так как BH — высота треугольника ABC. Углы $\angle ACB$ и $\angle ANB$ опираются на одну дугу AB, поэтому $\angle ACB = \angle ANB$.

Рассмотрим $\triangle ABN$ и $\triangle HBC$. Они подобны по двум углам, так как $\angle BAN = \angle BHC = 90^\circ$ и $\angle ANB = \angle HCB$. Тогда оставшиеся углы этих треугольников также равны: $\angle ABN = \angle HBC$. Значит, $\angle ABN = \angle KBC$. Так как $\angle ABN = \angle KBC$, то $AN = CK$.

б) Заметим, что $\angle NKB$ опирается на диаметр BN, поэтому $\angle NKB = 90^\circ$. Нужно найти KN — катет прямоугольного треугольника NKB. В треугольнике NKB известна длина гипотенузы $BN = 2 \cdot 12 = 24$, так как BN — диаметр окружности, радиус которой равен 12.



Рассмотрим $\triangle BHC$. Сумма его углов равна 180°, поэтому

$$\angle HBC = 180^\circ - \angle BHC - \angle BCH = 180^\circ - 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$$

В предыдущем пункте доказано, что $\angle ABN = \angle KBC$. Тогда

$$\angle ABN = \angle KBC = \angle HBC = 25^\circ$$

Рассмотрим $\triangle ABC$. Так как известны два его угла, то найдем третий:

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 180^\circ - 35^\circ - 65^\circ = 80^\circ$$

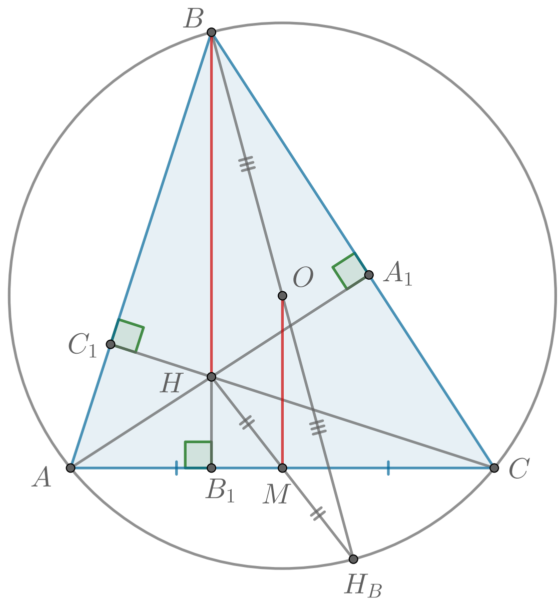
Теперь можем найти $\angle NBK$:

$$\angle NBK = \angle ABC - \angle ABN - \angle KBC = 80^\circ - 25^\circ - 25^\circ = 30^\circ$$

В прямоугольном треугольнике NKB катет KN лежит напротив угла $\angle NBK = 30^\circ$, поэтому

$$KN = \frac{BN}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

Свойство 6



Пусть O — центр описанной окружности треугольника. Тогда $BH = 2OM$.

Доказательство

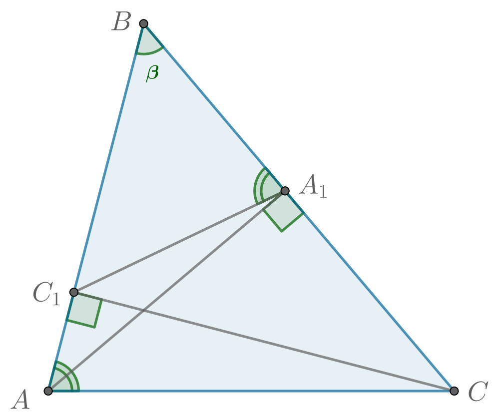
Пусть точка H_B симметрична ортоцентру H относительно середины M стороны AC. Тогда BH_B — диаметр описанной окружности треугольника ABC, следовательно, центр описанной окружности O — середина BH_B.

С другой стороны, M — середина отрезка H_BH в силу симметрии. Тогда MO — средняя линия треугольника HBH_B, параллельная стороне BH, значит, $BH = 2MO$.

8 Коэффициент подобия (любимое свойство МО)

Свойство 7

A_1 и C_1 — основания высот из вершин A и C соответственно треугольника ABC. Тогда $\triangle BA_1C_1 \sim \triangle BAC$ с коэффициентом $\cos\beta$, где $\angle ABC = \beta$.



Доказательство

Как мы уже знаем, четырехугольник AC_1A_1C вписанный, следовательно, $\angle CAC_1 = \angle BA_1C_1$. Угол B общий, значит $\triangle BA_1C_1 \sim \triangle BAC$ по двум углам с коэффициентом $\frac{BA_1}{BA}$.

ABA_1 — прямоугольный треугольник, значит,

$$\frac{BA_1}{BA} = \cos\beta$$

Таким образом, треугольники BA_1C_1 и BAC подобны с коэффициентом $\cos\beta$.

Слив №1 ЕГЭ 2023

1. Одна из сторон треугольника равна $\sqrt{2}$, прилежащие к этой стороне углы равны 75° и 60°. Найдите отрезок, соединяющий основания высот, проведённых из вершин этих углов.

Ответ

1

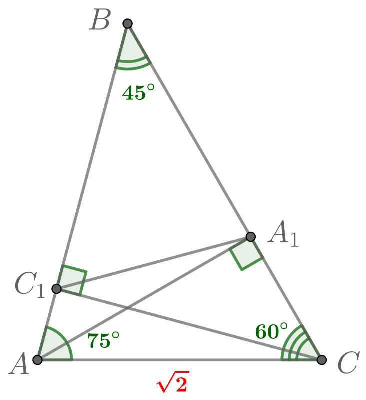
Решение

Пусть AA_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC, $AC = \sqrt{2}$, $\angle BAC = 75^\circ$, $\angle BCA = 60^\circ$. Тогда имеем:

$$\angle ABC = 180^\circ - 75^\circ - 60^\circ = 45^\circ$$

Значит, $k = \cos 45^\circ$ — коэффициент подобия треугольников A_1BC_1 и ABC. Тогда

$$\frac{A_1C_1}{AC} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_1C_1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad A_1C_1 = 1$$



2. Дан треугольник ABC. В нем проведены высоты AA_1 и CC_1. Известно, что $A_1C_1 = 3$, $AC = 5$. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC.

Ответ

$\frac{25}{8}$

Решение

По свойству 7

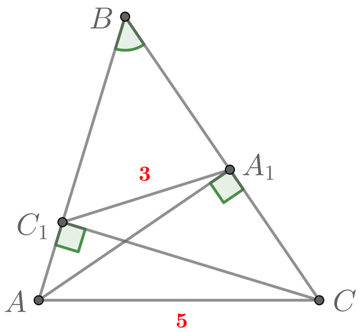
$$\cos\angle ABC = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{3}{5}$$

Тогда по основному тригонометрическому тождеству

$$\sin\angle ABC = \sqrt{1-\cos^2\angle ABC} = \frac{4}{5}$$

По теореме синусов для треугольника ABC

$$2R = \frac{AC}{\sin\angle ABC} = \frac{5}{\frac{4}{5}} = \frac{25}{4} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{25}{8}$$



9 Лемма о трезубце

Доказательство леммы

В треугольнике ABC биссектриса угла B пересекает описанную окружность в точке L. I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Тогда L равноудалена от точек A, C, I.

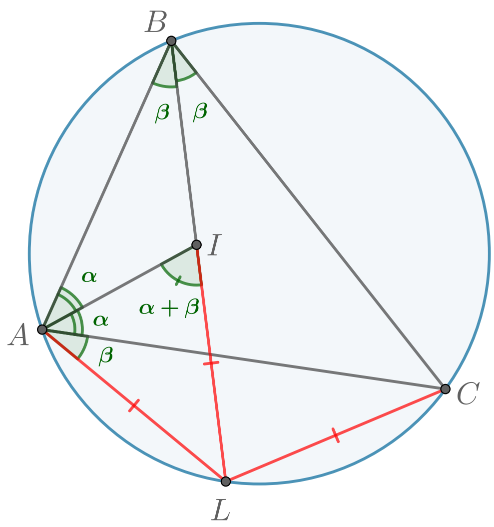
Доказательство

BL — биссектриса, следовательно, L — середина соответствующей дуги AC. Тогда она равноудалена от концов дуги, значит, $LA = LC$.

Обозначим $\frac{1}{2}\angle A = \alpha$, $\frac{1}{2}\angle B = \beta$. $\angle LAC = \angle LBC = \beta$, так как опираются на дугу LC. $\angle AIL = \angle IAB + \angle ABI = \alpha + \beta$ как внешний в треугольнике ABI. Получили в треугольнике AIL :

$$\angle LAI = \angle LAC + \angle CAI = \alpha + \beta = \angle AIL \quad \Rightarrow \quad LA = LI$$

Таким образом, $LA = IL = CL$.



Задача №3

Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P.

а) Докажите, что $\angle POC = \angle PCO$.

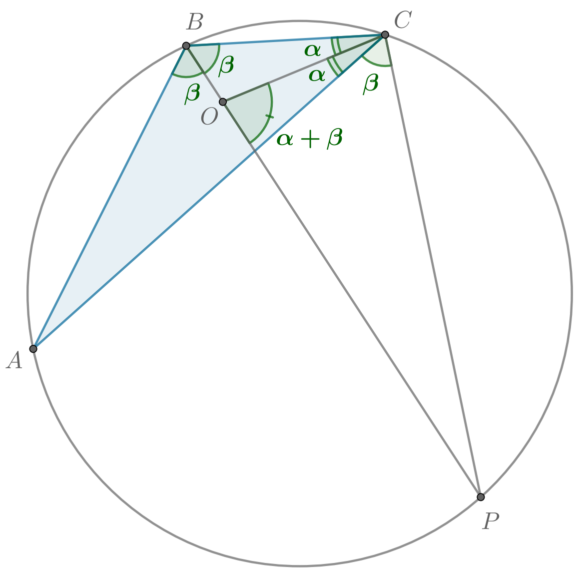
б) Найдите площадь треугольника APC, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 4, а $\angle ABC = 120°$.

Доказательство

а) Доказательство этого пункта полностью аналогично доказательству леммы о трезубце. На реальном ЕГЭ его нужно полностью воспроизвести, но тут мы просто скажем, что $CP = PO$ по лемме.

Тогда $\triangle CPO$ равнобедренный, значит, его углы при основании равны, то есть

$$\angle PCO = \angle POC$$

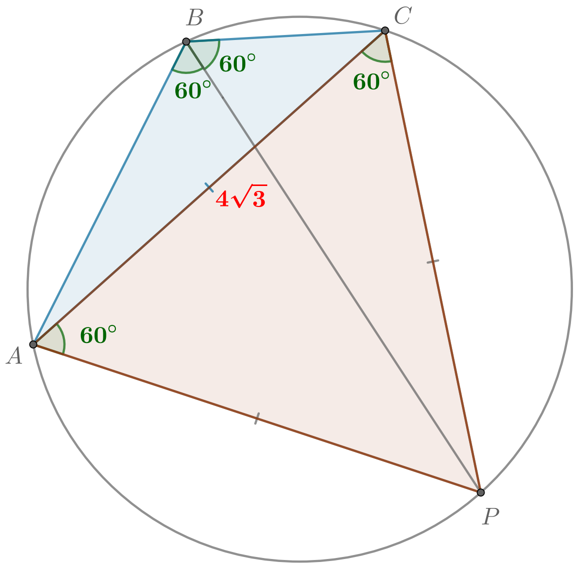


б) Так как $\angle ABC = 120^\circ$, то по предыдущему пункту

$$\angle ACP = \angle ABP = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

По аналогичным соображениям

$$\angle CAP = \angle CBP = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$



Тогда $\triangle APC$ — равносторонний, так как два угла в нём равны 60°. Найдем длину его стороны AC. Для этого рассмотрим $\triangle ABC$. По условию около него описана окружность радиуса $R = 4$. Тогда по теореме синусов

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R \quad \Rightarrow \quad AC = 2\cdot 4\cdot \sin 120^\circ = 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Тогда площадь равностороннего треугольника APC равна

$$S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}AC^2\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot(4\sqrt{3})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{16\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$$

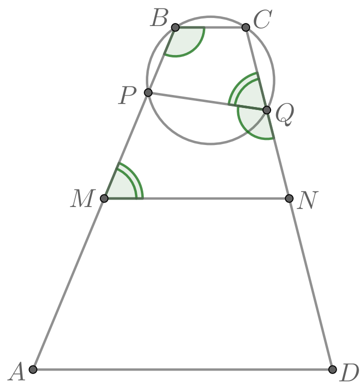
10 Решение задачи №16.3 с реального ЕГЭ

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точки M и N являются серединами сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C, пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q (отличных от концов отрезков).

а) Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

б) Найдите QN, если отрезки DP и PC перпендикулярны, $AB = 21$, $BC = 4$, $CD = 20$, $AD = 17$.

Решение



а) По условию четырёхугольник $PBCQ$ вписанный. Значит, сумма его противоположных углов равна $180°$. То есть

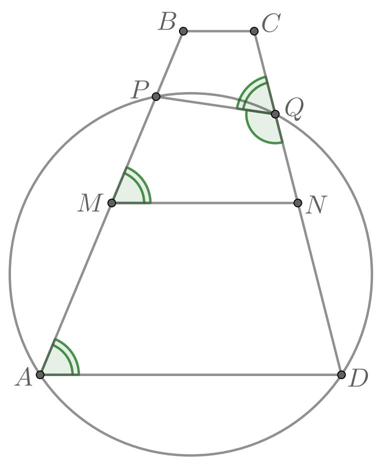
$$\angle PBC + \angle PQC = 180° \quad \Rightarrow \quad \angle PQC = 180° - \angle PBC$$

Заметим, что MN — средняя линия трапеции $ABCD$ по условию. Значит, $MN \parallel BC$. Тогда четырёхугольник $MBCN$ — трапеция. То есть

$$\angle MBC + \angle BMN = 180° \quad \Rightarrow \quad \angle BMN = 180° - \angle MBC = 180° - \angle PBC = \angle PQC$$

Заметим, что углы PQC и PQN являются смежными. То есть $\angle PQC + \angle PQN = 180°$. Тогда рассмотрим четырёхугольник $MPQN$. В нём сумма противоположных углов равна

$$\angle PMN + \angle PQN = \angle BMN + \angle PQN = \angle PQC + \angle PQN = 180°$$



Значит, четырёхугольник $MPQN$ вписанный.

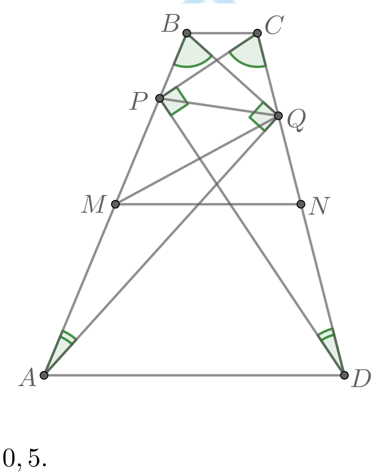
б) Рассмотрим четырёхугольник $APQD$. Докажем, что он вписанный. Так как $MN \parallel AD$, то $\angle PMN = \angle PAD$ как соответственные углы, образованные параллельными прямыми MN и AD и секущей AP. Тогда сумма противоположных углов четырёхугольника $APQD$ равна

$$\angle PAD + \angle PQD = \angle PMN + \angle PQN = 180°$$

То есть четырёхугольник $APQN$ вписанный.

Во вписанном четырёхугольнике $PBCQ$ углы PBQ и PCQ равны, так как они опираются на одну сторону PQ. Аналогично во вписанном четырёхугольнике $APQD$ углы PAQ и PDQ равны, так как они опираются на одну сторону PQ. Сложим два этих равенства и получим

$$\angle PBQ + \angle PAQ = \angle PCQ + \angle PDQ$$



Рассмотрим треугольник CPD. По условию в нём $\angle CPD = 90°$. Тогда по сумме углов треугольника имеем:

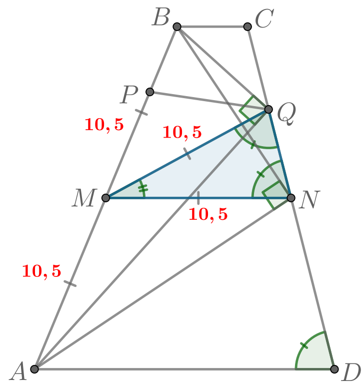
$$90° = \angle PCD + \angle PDC = \angle PCQ + \angle PDQ = \angle PBQ + \angle PAQ = \angle ABQ + \angle BAQ$$

То есть по сумме углов в треугольнике AQB :

$$\angle BQA = 180° - (\angle ABQ + \angle BAQ) = 180° - 90° = 90°$$

Значит, треугольник BQA является прямоугольным. Отрезок QM — его медиана, проведенная к гипотенузе AB. Значит, $QM = AM = BM = \frac{1}{2}AB = 10,5$.

Рассмотрим треугольник BNA. Заметим, что в трапеции $ABCD$ отрезок MN является средней линией, то есть



$$MN = \frac{AD + BC}{2} = \frac{17 + 4}{2} = \frac{21}{2} = 10,5$$

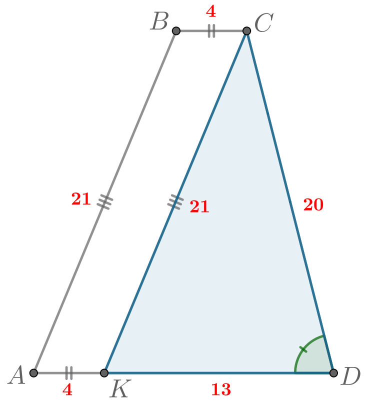
Следовательно, $AM = NM = BM = QM = 10,5$. Тогда точки A, B, Q и N лежат на окружности с центром в точке M и радиусом 10,5. Рассмотрим треугольник QMN. Он равнобедренный, так как $QM = NM$. То есть $\angle MQN = \angle MNQ$, а $\angle QMN = 180^\circ - 2\angle MNQ$. Тогда по теореме синусов имеем:

$$\frac{QM}{\sin\angle MNQ} = \frac{QN}{\sin\angle QMN} \quad\Rightarrow\quad QN = \frac{QM\cdot\sin\angle QMN}{\sin\angle MNQ} = \frac{QM\cdot\sin(180^\circ - 2\angle MNQ)}{\sin MNQ} = \frac{QM\cdot\sin 2\angle MNQ}{\sin\angle MNQ}$$

По формуле синуса двойного угла $\sin 2\angle MNQ = 2\cdot\cos\angle MNQ\cdot\sin\angle MNQ$. То есть

$$QN = \frac{QM\cdot\sin 2\angle MNQ}{\sin\angle MNQ} = \frac{QM\cdot 2\cdot\cos\angle MNQ\cdot\sin\angle MNQ}{\sin\angle MNQ} = 2QM\cdot\cos\angle MNQ$$

Найдем косинус угла MNQ. Заметим, что так как MN — средняя линия трапеции $ABCD$, то $MN \parallel AD$. Тогда $\angle MNQ = \angle ADC$ как соответственные углы, образованные параллельными прямыми MN и AD и секущей CD. Следовательно, $\cos\angle MNQ = \cos\angle ADC$.



Через точку C проведем прямую, параллельную прямой AB. Пусть она пересекает AD в точке K. Тогда $ABCK$ — параллелограмм, так как $BC \parallel AK$ и $AB \parallel CK$. Тогда $AK = BC = 4$ и $CK = AB = 21$. Следовательно, $KD = AD - AK = 17 - 4 = 13$.

Рассмотрим треугольник KDC. По теореме косинусов имеем:

$$CK^2 = KD^2 + CD^2 - 2KD\cdot CD\cdot\cos\angle ADC \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \cos\angle ADC = \frac{KD^2 + CD^2 - CK^2}{2KD\cdot CD} = \frac{169 + 400 - 441}{2\cdot 13\cdot 20} = \frac{16}{65}$$

Следовательно,

$$QN = 2QM\cdot\cos\angle MNQ = AB\cos\angle ADC = 21\cdot\frac{16}{65} = \frac{336}{65}$$

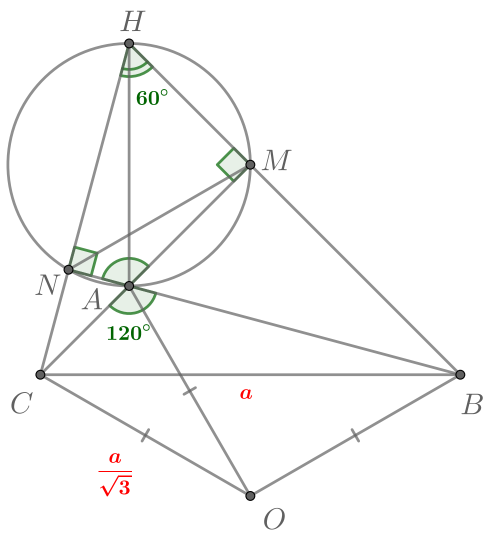
11 Решение задачи №16.2 с реального ЕГЭ

В треугольнике ABC угол A равен $120°$. Прямые, содержащие высоты BM и CN треугольника ABC, пересекаются в точке H. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

а) Докажите, что $AH = AO$.

б) Найдите площадь треугольника AHO, если $BC = 3$, $\angle ABC = 15°$.

Решение



а) Прямые BM и CN образуют треугольник BCH, в котором CM и BN являются высотами. Пусть O — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности. Тогда $AO = R$ — ее радиус. Требуется доказать, что $AH = R$.

Введем $BC = a$. Тогда по теореме синусов для $\triangle ABC$:

$$\frac{BC}{\sin\angle BAC} = 2R \quad \Rightarrow \quad R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$120° = \angle BAC = \angle MAN \quad \Rightarrow \quad \angle MHN = 360° - 90° - 90° - 120° = 60°$$

$\triangle MHN \sim \triangle CHB$, причем по свойству со второго вебинара интенсива мы знаем, что коэффициент подобия таких треугольников равен

$$k = MN : BC = \cos\angle MHN$$

Таким образом, $k = \cos 60° = \frac{1}{2}$. Так как радиус описанной окружности одного из двух подобных треугольников относится к радиусу описанной окружности другого треугольника с тем же коэффициентом, что и стороны, то радиус окружности, описанной около $\triangle MHN$ (назовем его R_{MHN}) в два раза меньше, чем радиус окружности, описанной около $\triangle CHB$ (назовем его R_{CHB}):

$$R_{MHN} = \frac{1}{2}R_{CHB} \quad (*)$$

Заметим, что по теореме синусов для $\triangle CHB$:

$$\frac{BC}{\sin\angle CHB} = 2R_{CHB} \quad \Rightarrow \quad R_{CHB} = \frac{a}{\sqrt{3}} = R$$

Заметим также, что окружность, описанная около $\triangle MHN$, — это окружность, описанная около четырехугольника $MHNA$ (так как суммы его противоположных углов равны $180°$, он является вписанным). Так как вписанный угол $\angle AMH = 90°$, то AH — диаметр этой окружности. Следовательно,

$$AH = 2R_{MHN} \overset{(*)}{=} 2\cdot\frac{1}{2}R_{CHB} = R_{CHB} = R$$

б) Пусть прямая HA пересекает отрезок BC в точке S. В треугольнике BHC точка A является точкой пересечения высот BN и CM. Значит, HA — третья высота треугольника BHC. То есть $\angle BSH = 90°$.

Найдём угол HAO. По построению HS — прямая, поэтому

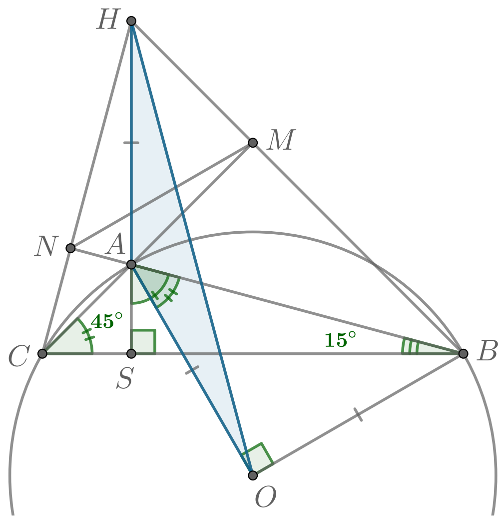
$$180° = \angle HAO + \angle OAS \quad \Rightarrow \quad \angle HAO = 180° - \angle OAS = 180° - (\angle SAB - \angle BAO)$$

Найдём угол SAB. По условию $\angle ABC = 15°$, следовательно,

$$\angle SAB = 180° - \angle BSA - \angle ABS = 180° - 90° - 15° = 75°$$

Найдём угол BAO. Для этого рассмотрим треугольник BAO. В нём стороны OA и OB являются радиусами описанной окружности треугольника ABC, поэтому $\triangle BAO$ — равнобедренный с учетом $OA = OB$. Угол BOA является центральным и опирается на дугу AB. Тогда $\angle BOA = 2\angle BCA$, так как $\angle BCA$ — вписанный угол, опирающийся на дугу AB. То есть

$$\angle BOA = 2\angle BCA = 2(180° - \angle BAC - \angle ABC) = 2(180° - 120° - 15°) = 2 \cdot 45° = 90°$$



Так как треугольник BAO равнобедренный, то

$$\angle BAO = \frac{180° - \angle BOA}{2} = \frac{90°}{2} = 45°$$

Значит, мы можем найти $\angle HAO$:

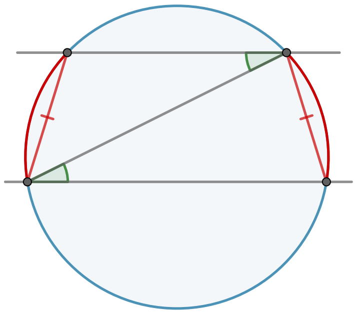
$$\angle HAO = 180° - \angle SAB + \angle BAO = 180° - 75° + 45° = 150°$$

Вычислим площадь треугольника AHO :

$$S_{AHO} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot AO \cdot \sin \angle HAO = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{BC\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \sin 150° = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

12 Еще несколько фажных фактов

Факт №9

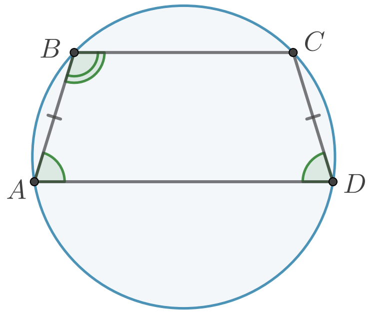


Если окружность пересекают две параллельные прямые, то они высекают равные хорды.

Доказательство

Так как прямые параллельны, то накрест лежащие углы равны. Тогда они опираются на равные дуги, а значит и хорды, которые их стягивают, равны.

Факт №10



Вписанная трапеция всегда равнобедренная, и равнобедренная трапеция всегда вписанная.

Доказательство

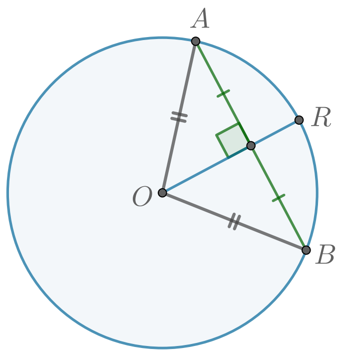
1) Если трапеция $ABCD$ — вписанная, то $\angle ABC + \angle CDA = 180°$. Так как $ABCD$ — трапеция, то $\angle ABC + \angle BAD = 180°$. Тогда $\angle CDA = \angle BAD$.

2) Если трапеция $ABCD$ является равнобедренной, то $\angle CDA = \angle BAD$. Тогда так как $ABCD$ — трапеция, имеем

$$180° = \angle ABC + \angle BAD = \angle ABC + \angle CDA$$

Значит, $ABCD$ — вписанная трапеция.

Факт №11



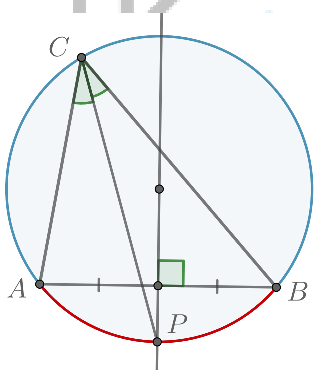
Если радиус перпендикулярен хорде, то он делит ее пополам. Верно обратное: если радиус делит хорду пополам, то он ей перпендикулярен.

$$OR \perp AB \quad \Leftrightarrow \quad OR \text{ делит } AB \text{ пополам}$$

Доказательство

OA и OB — радиусы, тогда треугольник OAB — равнобедренный. Значит, если радиус $OR \perp AB$, то он пересекает AB в середине. Доказательство в обратную сторону аналогично.

Факт №12



Биссектриса угла C треугольника ABC и серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекаются в точке, которая лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Доказательство

Биссектриса угла C пересекает второй раз описанную окружность треугольника ABC в середине дуги AB.

Серединный перпендикуляр к отрезку AB также пересекает дугу AB в ее середине. Что и требовалось доказать.

13 Решение задачи №16.1 с реального ЕГЭ

Дана трапеция $ABCD$ с большим основанием AD, вписанная в окружность. Продолжение высоты трапеции BH пересекает окружность в точке K.

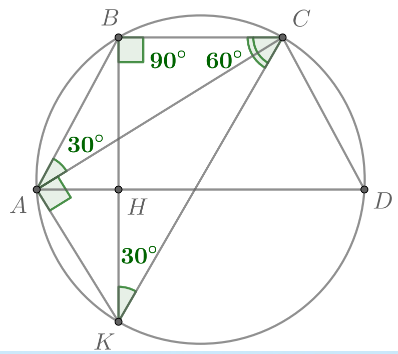
а) Докажите, что отрезки AC и AK перпендикулярны.

б) Найдите AD, если радиус описанной окружности равен 6, угол BAC составляет $30°$, отношение площадей $BCNH$ к NKH равно 35, где N — точка пересечения отрезков AD и CK.

Решение

Заметим, что оба угла BKC и BAC опираются на одну дугу окружности, описанной вокруг трапеции $ABCD$, поэтому $\angle BKC = \angle BAC = 30°$. В $\triangle KBC$ стороны BC и BK перпендикулярны, так как BH — высота трапеции. То есть $\angle KBC = 90°$. Если вписанный угол окружности равен $90°$, то он опирается на диаметр. Значит, CK — диаметр описанной окружности трапеции $ABCD$. Третий угол в $\triangle KBC$ равен

$$\angle BCK = 180° - \angle BKC - \angle KBC = 60°$$



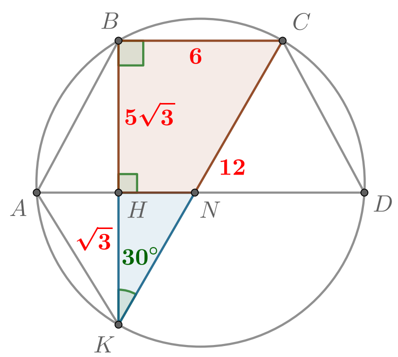
а) Точки A, K, B и C лежат на описанной окружности трапеции $ABCD$. Значит, $\angle KAC = \angle KBC = 90°$, так как эти углы опираются на диаметр CK. Поэтому $AC \perp AK$.

б) Если трапеция вписана в окружность, то она равнобокая. Тогда в силу симметрии высота BH равнобокой трапеции делит её большее основание AD на отрезки $AH = \frac{1}{2}(AD - BC)$ и $HD = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

По условию отношение площадей $BCNH$ к NKH равно 35. Тогда

$$\frac{S_{BCNH}}{S_{NKH}} = 35 \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{BCNH} + S_{NKH}}{S_{NKH}} = \frac{S_{CKB}}{S_{NKH}} = 36 = 6^2$$

Заметим, что $\triangle CKB \sim \triangle NKH$ по двум углам: $\angle KBC = \angle KHN = 90°$, так как BH — высота трапеции, $\angle BKC = \angle HKN = 30°$ — общий. Тогда коэффициент подобия этих треугольников равен 6. Значит, $\dfrac{BK}{HK} = 6$.



Заметим, что $\triangle CKB$ — прямоугольный с острыми углами в $30°$ и $60°$. Его гипотенуза CK — диаметр окружности с радиусом 6. Тогда $CK = 12$. Значит,

$$BC = \frac{1}{2}CK = 6, \;\; BK = CK \cdot \cos 30° = 6\sqrt{3}$$

Тогда имеем:

$$\frac{BK}{HK} = \frac{6\sqrt{3}}{HK} = 6 \quad \Rightarrow \quad HK = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad BH = BK - HK = 6\sqrt{3} - \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

Рассмотрим большее основание трапеции AD. Оно является хордой описанной окружности трапеции $ABCD$. Хорда BK пересекает хорду AD в точке H. Тогда произведение длин отрезков AH и HD равно произведению длин отрезков BH и HK. То есть $AH \cdot HD = BH \cdot HK$. Ранее мы получили, что

$$AH = \frac{AD - BC}{2},\ HD = \frac{AD + BC}{2},\ BH = 5\sqrt{3},\ HK = \sqrt{3}$$

Тогда окончательно имеем:

$$\frac{AD - BC}{2} \cdot \frac{AD + BC}{2} = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad AD^2 - BC^2 = 4 \cdot 15 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad AD^2 = 60 + 6^2 = 6 \cdot 16 \quad \Rightarrow \quad AD = 4\sqrt{6}$$