Вебинар 1 (27.08). Матанализ. Предел последовательности. Свойства предела. $\varepsilon - \delta$-язык.

1 Последовательности.

Начнём сразу с определения:

Опр. Последовательностью называется любая функция $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Что это значит? Это значит, что мы просто выбрали в каком порядке будут идти какие-то вещественные числа:

$$x_1, \, x_2, \, x_3, \, x_4, ..., x_n, ...$$

Важное замечание: Элементов в последовательности должно быть бесконечно много!
Зачем так определять последовательность? Это философский вопрос, и ответ на него станет яснее по ходу курса. Пока можно сказать, что, во-первых, как ни странно, но такая модель гораздо лучше и корректнее описывает какие-то процессы в реальном мире, чем если рассматривать только конечные наборы.
Более конкретно, можно сказать, что если мы хотим уметь считать пределы у чего-то, то мы должны уметь куда-то "стремиться", а чтобы "стремиться", нужно бесконечное количество членов последовательности.

Пример 1. Последовательность, в которой одно и то же число повторяется бесконечное количество раз: $x_1 = 5$, $x_2 = 5$, $x_3 = 5$, $... x_n = 5$, ... - все члены последовательности равны 5. Это так называемая константная последовательность.
Конечно, среди элементов последовательности могут быть повторы! Мы этого не запрещали. Константная последовательность - это один сплошной зацикленный повтор и есть. На самом деле, несмотря на тривиальность примера, он нам ещё не один десяток раз пригодится.

Пример 2. $x_1 = 16$, $x_2 = \frac{\pi}{5}$, $x_3 = 2234235345$, $x_4 = 0 \, x_5 = -100, 45$, ...
Правда, здесь совсем непонятно, что это за многоточие в конце и что оно означает. Мы по первым членам последовательности вообще очевидно в данном случае не можем понять, как она устроена. Но представьте, что после x_5 она тоже как-то устроена, там что-то есть, неважно, что. Это тоже будет примером последовательности. Однако, такое задание (представьте, что там что-то есть) непродуктивно. Обычно, мы будем задавать последовательности формулами.

Как именно? Очень просто. Поскольку последовательность - это занумерованный набор вещественных чисел $x_n \in \mathbb{R}$, мы должны просто указать, как по порядковому номеру натурального числа, т.е. по n, вычислять n-ый член последовательности, т.е. x_n. Приведём пару примеров:
Пример 3. $x_n = 2n$. Вот её первые несколько членов $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$, ... - последовательность чётных чисел.
Пример 4. $x_n = \frac{n^2-n^3+5}{2n+1}$. Вот её первые несколько членов $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{1}{5}$, $x_3 = -\frac{13}{7}$, ... Да, она в свою очередь задаётся уже куда более сложной формулой, в сравнении с предыдущим примером. Но формула может быть вообще любой, лишь бы можно было однозначно, корректно вычислить, какое число стоит под номером n, т.е вычислить x_n.

2 Ограниченные последовательности и их пределы.

Для начала дадим несколько важных и полезных определений.

Опр. Последовательность x_n называется ограниченной сверху, если $\exists C \in \mathbb{R}$ такая, что $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено $x_n < C$.

Опр. Последовательность x_n называется ограниченной снизу, если $\exists c \in \mathbb{R}$ такая, что $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено $x_n > c$.

Опр. Последовательность x_n называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу.

Интуитивно можно понимать так: ограниченность сверху означает, что вся последовательность целиком находится левее какого-то числа C на числовой прямой $\mathbb{R}$.
Аналогично, ограниченность снизу - правее какого-то числа c.
Просто ограниченность - это ограниченность "двусторонняя": и сверху и снизу.

Пример 1. Последовательность $x_n = 2n$ - не ограничена сверху, т.к. не существует самого большого чётного числа.

Пример 2. Константная последовательность $x_n \equiv 5$ (как в самом первом примере последовательности, т.е. $x_n = 5\, \forall n \in \mathbb{N}$) - ограничена и сверху и снизу, т.е. просто ограничена - очевидно.

Пример 3. Последовательность $x_n = \sin n$ - ограничена и сверху и снизу (сверху, например, 2, а снизу -2; эти оценки "грубые", но нас пока что это мало волнует), поскольку ограниченной является функция $\sin x$, как известно из школы ($\forall x \in \mathbb{R}: \ -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$).

Пример 4. Последовательность $x_n = 4n - 5n^2 - 6$ не ограничена снизу, поскольку это по сути парабола ветвями вниз (при n^2 у нас стоит отрицательный коэффициент -5), взятая только в натуральных точках.
Однако, она обязана быть ограниченной сверху, ровно по тем же причинам: парабола ветвями вниз всегда лежит ниже какой-то линии уровня $C \in \mathbb{R}$.

Контрольный вопрос: Если известно, что последовательность x_n - не ограничена, то значит ли это, что она не ограничена ни снизу, ни сверху?

Ответ: На этот вопрос можно ответить с двух точек зрения: с логической и с содержательной. Но и при том, и при другом подходе ответ будет - **нет.**

1. С точки зрения логики, ответ бы звучал так: условие ограниченности последовательности x_n записывается следующим образом: x_n - ограничена, если $\exists c, \exists C \in \mathbb{R}$ такие, что $\forall n \in \mathbb{N}: \ c < x_n < C$ (т.е. x_n - ограничена по определению, если она ограничена *сверху* И *снизу* - должны выполняться *оба* эти условия.)
Соответственно, последовательность x_n - не ограничена, если неверно, что $\exists c, C \in \mathbb{R}$ такие, что $\forall n \in \mathbb{N}: \ c < x_n < C$. То есть, неверно, что она одновременно ограничена *сверху* И *снизу.* А для этого достаточно нарушить уже одно из двух условий.
Например, не ограниченная сверху и ограниченная снизу уже не будет, конечно, просто ограниченной по нашему определению.
Итак, уже из логического анализа определения ограниченности следует, что если x_n - не ограничена, то это ещё не значит, что она не ограничена ни снизу, ни сверху.

2. На содержательном уровне ответ будем таким: можно просто построить контрпример. Скажем, последовательность $x_n = 3^n + n^2 + 1000$. Она, разумеется, не является ограниченной (т.к. x_n с ростом n может быть сделано сколь угодно большим). Однако, она ограничена снизу (например, нулём).

Далее, приступим к нашему основному определению предела:

Опр. Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности x_n (обознач.: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$), если $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$ выполнено: $|x_n - a| < \varepsilon$.
Замечание: множество точек, находящихся на расстоянии меньше ε от заданной точки a (т.е. множество $\{x \in \mathbb{R}: \ |x - a| < \varepsilon\}$) называется ε-окрестностью числа a и обозначается $U_\varepsilon(a)$.

Таким образом, наше определение предела можно записать чуть более компактно: число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности x_n, если $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$ выполнено: $x_n \in U_\varepsilon(a)$

`Неформально говоря, это означает, что, какую бы точность` $\varepsilon > 0$ `нам ни дали (т.е. нам разрешается находиться в окрестности радиуса` ε `точки` a`), мы всегда сможем подыскать такой номер` N`, который, конечно, зависит от допустимой погрешности, т.е. от радиуса окрестности (`N `зависит от` ε`, пишется это иногда как` $N = N(\varepsilon)$`), что, начиная с этого номера (т.е. при` $n > N$`) все наши члены попадают в` ε`-окрестность точки` a.
Рекомендуется несколько раз прочитать как формальное, так и неформальное определение и у себя их в голове сопоставить. А пока мы разберём несколько примеров вычисления предела:

Пример 1. Стандартный пример сходящейся последовательности, с которого обычно всё начинают объяснять - это последовательность чисел, обратных к натуральным: $x_n = \frac{1}{n}$.
И так, конечно, ясно, что чем больше n, тем больше знаменатели дробей, и тем меньше сами дроби - они всё стремительнее и стремительнее приближаются к 0 (но самому 0 никогда равны не станут, впрочем, это не мешает последовательности x_n стремиться к 0).
Если же мы хотим порассуждать чуть более строго, то, формально, по определению, чтобы доказать, что $x_n \to 0$ при $n \to +\infty$, то нужно доказать, что:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N: \ |x_n - 0| < \varepsilon$$

Минус ноль можно под модулем и не писать, и мы получаем, что нам нужно доказать, что:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N: \ |x_n| < \varepsilon$$

Докажем это:
Пусть нам дали какой-то конкретный $\varepsilon_0 > 0$. Какой именно - мы не знаем, нам могли дать любой (как и написано в определении предела: $\forall \varepsilon > 0$... и т.д.)
Итак, по этому самому ε_0 нам надо научиться строить N, такой что $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon_0$ при всех $n > N$. Полученное неравенство можно переписать так, раскрыв модуль: $\frac{1}{n} < \varepsilon_0$ (т.к. $\frac{1}{n}$ всегда положительна, и модуль от неё раскрывается всегда с одним знаком). Как же научиться строить такое N?
Для этого сделаем такой не самый хитрый трюк: (и мы очень часто, когда будем искать предел по определению, будем делать именно так)

Найдём N, такое что $\frac{1}{N} < \varepsilon_0$. Но это неравенство эквивалентно неравенству $\frac{1}{\varepsilon_0} < N$. То есть чтобы $\frac{1}{N} < \varepsilon_0$, надо взять любое натуральное число N большее, чем $\frac{1}{\varepsilon_0}$.
А далее мы замечаем такую простую вещь, что и при любых $n > N$ тем более будет выполняться неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon_0$. (Если мы уже при N сделали дробь меньше ε_0, то, т.к. $n > N$, то дробь $\frac{1}{n}$ и того меньше, чем $\frac{1}{N}$, которая, в свою очередь, уже сделана меньше ε_0).
Таким образом, мы умеем по любому ε определять, начиная с какого момента N все члены последовательности x_n будут попадать в ε-окрестность числа 0. Значит, мы по определению проверили, что 0 является её пределом.

Пример 2. Ещё один пример сходящейся последовательности - это константаная последовательность. Возьмём, например, такую:

$$x_1 = 2022, x_2 = 2022, x_3 = 2022, x_4 = 2022, ...$$

Вообще, нетрудно проверить, что если последовательность $x_n = c$ для какой-то константы c при любом n, то она будет сходящейся, и обязательно будет сходиться к этой самой константе c (а куда ж ещё ей сходиться?!).

Почему это так? Проверим по определению. Действительно, пусть нам дали любое $\varepsilon_0 > 0$. Какой именно - мы не знаем.
Итак, по этому самому ε_0 нам надо построить N такое, что $|x_n - 2022| < \varepsilon_0$ при всех $n > N$. Однако в нашем примере x_n и так всегда равна 2022, поэтому то что стоит под модулем: $|x_n - 2022|$ автоматически всегда равно 0, и поэтому оно заведомо меньше любого ε_0, именно потому, что мы в определении предела берём $\varepsilon_0 > 0$.
Следовательно, над выбором $N(\varepsilon_0)$ нам не нужно даже задумываться, можно взять $N(\varepsilon_0)$ любым и оно автоматически подойдёт.

Пример 3. Вот ещё один, чуть менее очевидный, пример сходящейся последовательности: $x_n = \frac{n+2}{n+1}$.
Действительно, если слегка преобразовать выражение, задающее общий член этой последовательности, то получится: $x_n = \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$.
А теперь уже по определению нетрудно показать, что x_n стремится к 1.

А именно, для этого достаточно по любому $\varepsilon > 0$ научиться строить такое $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N$ будет выполнено $|x_n - 1| < \varepsilon$.
Однако в преобразованном виде $x_n = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$, поэтому последнее неравенство эквивалентно $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$.
Таким образом, мы свели утверждение о том, что $x_n \to 1$ к тому, чтобы показать, что $\frac{1}{n+1}$ может быть сделана меньше любого наперёд заданного $\varepsilon > 0$. Но это-то как раз мы уже научились показывать в **Примере 1** - с той лишь разницей, что теперь наша последовательность начинается с $\frac{1}{2}$, а не с 1 (т.к. у нас $\frac{1}{n+1}$, а не $\frac{1}{n}$). Но это, разумеется, ни на что не влияет.

Пример 4. Рассмотрим слегка более общую ситуацию, чем в **Примере 1**. Несмотря на то, что это не особенно существенная модификация **Примера 1**, нам она часто будет полезна, поэтому мы отдельно выделим этот случай.

Итак, пусть последовательность x_n имеет вид $x_n = \frac{C}{n^\alpha}$, где $\alpha > 0$, а C - любая константа.
Покажем, что такая последовательность x_n обязана стремиться к 0.
Действительно, чтобы доказать это по определению, достаточно доказать, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n > N \text{ выполнено } |x_n| < \varepsilon$$

Подставим в последнее неравенство вместо x_n нашу последовательность $x_n = \frac{C}{n^\alpha}$ и получим неравенство $|\frac{C}{n^\alpha}| < \varepsilon$. Оно эквивалентно неравенству (просто переворачиваем обе части неравенства и возводим его в степень $\frac{1}{\alpha}$): $n > \sqrt[\alpha]{\frac{|C|}{\varepsilon}}$.
Таким образом, в качестве N можно взять как раз $\left\lceil \sqrt[\alpha]{\frac{|C|}{\varepsilon}} \right\rceil$ (значок $\lceil x \rceil$ означает целую часть от числа x, округлённую вверх - так называемая функция "потолок", англ.:"floor").
При таком N получится, что $|x_N| = |\frac{C}{N^\alpha}| < \varepsilon$.

Тогда автоматически при $n > N$ будет выполнено, что $|x_n| < \varepsilon$, поскольку последовательность $|\frac{C}{x^\alpha}|$ - монотонно убывает (проверьте!).
А значит, если неравенство $|x_N| < \varepsilon$ выполнилось для какого-то N, то и для всех $n > N$ оно тоже будет выполняться - это простое следствие монотонного убывания.

Тем самым, мы по определению показали, что любая последовательность вида $x_n = \frac{C}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$ стремится к 0 при $n \to +\infty$.

Пример 5. Ещё один довольно показательный пример сходящейся последовательности: $x_n = \frac{1000n}{n^2+1}$. Этот пример интересен тем, что в самом начале (посчитайте сами, до какого n? **Ответ:** до $n = 1000$) у нас последовательность вообще непохожа на сходящуюся к 0, поскольку числители дробей $\frac{1000n}{n^2+1}$ до какого-то момента будут больше знаменателей.

Однако, мы и приводим этот пример потому, что он поучителен сразу по двум пунктам:
1. Поведение никакого начального куска последовательности не влияет на её сходимость/расходимость, и на значение предела в случае сходимости.
2. Основным соображением при исследовании пределов последовательностей, в которые входят многочлены, является такое: всё решает старшая степень. У кого старшая степень больше, тот и стремится быстрее к $+\infty$.

То есть, неформально, мы уже должны заметить, что у многочлена знаменателя степень 2, в то время как у числителя - всего лишь 1. Квадратичное стремление к $+\infty$ быстрее линейного, поэтому у нас уже должна родиться гипотеза о том, что $x_n = \frac{1000n}{n^2+1} \to 0$. Попробуем её обосновать:

На самом деле, у нас для этого уже всё есть. Совершив один очень часто встречающийся, стандартный трюк, т.е. поделив и числитель и знаменатель дроби на что-нибудь подходящее, в данном случае на n, получим: $x_n = \frac{1000n}{n^2+1} = \frac{1000}{n+\frac{1}{n}}$. И что же мы видим? Оказывается, наша последовательность почти что имеет вид последовательности из **Примера 4**, т.е. вид $\frac{C}{n^\alpha}$.В нашем случае $C = 1000$, но внизу стоит не просто n^α (при $\alpha = 1$), а $n + \frac{1}{n}$. Но, как мы уже знаем из **Примера 1**, этот добавок $\frac{1}{n}$ - бесконечно мал, и, тем самым, т.к. он стремится к 0, то на знаменатель он не повлияет. Таким образом, с небольшими видоизменениями, так же можно доказать, что $\frac{1000}{n+\frac{1}{n}} \to 0$.

Пример 6. Рассмотрим ещё вот такую последовательность: $x_n = \frac{2^{n+2}}{7^n}$.
Итак, если основным соображением при работе с многочленами было то, что решающий вклад в поведение последовательности при $n \to +\infty$ вносит старшая степень переменной n, то в случае с показательными выражениями, основной вклад будет вносить член с наибольшим основанием степени: в нашем случае 7^n.
Давайте разделим и числитель и знаменатель на 7^n и получим, что $x_n = \frac{2^{n+2}}{7^n} = \frac{4\cdot(\frac{2}{7})^n}{1} = 4 \cdot (\frac{2}{7})^n$.

Если посчитать первые несколько членов последовательности $(\frac{2}{7})^n$, то нетрудно убедить себя,

что она всё убывает и убывает. Можно сформулировать гипотезу, что $(\frac{2}{7})^n \to 0$. И это действительно так.
Чтобы это доказать по определению, достаточно достаточно доказать, что:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ такое, что } \forall n > N \text{ выполнено } |(\frac{2}{7})^n| < \varepsilon$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству $n > \log_{\frac{2}{7}} \varepsilon$ (берём логарифм по основанию $\frac{2}{7}$ от обеих частей и не забываем, что логарифмирование по основанию $\beta \in (0, 1)$ меняет знак неравенства на противоположный, т.к. $\log_\beta x$ при таких β - монотонно убывающая функция, как известно из школьного курса).

Значит, если взять $N = \left\lceil \log_{\frac{2}{7}} \varepsilon \right\rceil$, то будет выполнено, что $(\frac{2}{7})^N < \varepsilon$. А, значит, и при всех $n > N$ тем более будет выполнено, что $(\frac{2}{7})^n < \varepsilon$ (это вновь следует из монотонного убывания последовательности $(\frac{2}{7})^n$).

Мы по определению показали, что $(\frac{2}{7})^n \to 0$. А наша последовательность - это $(\frac{2}{7})^n$, умноженная на 4. Но умножение на 4 "не портит" сходимость к 0 - это мы докажем строго чуть позже. На неформальном уровне и так понятно, что если наша последовательность может быть сделана сколь угодно малой, то даже умноженная на 4 она не потеряет этого свойства, поскольку сколь угодно малая величина может быть уменьшена сначала в 4 раза, а затем уже сделана сколь угодно малой.

Пример 7. Приведём теперь пример расходящейся последовательности. Каким образом вообще у последовательности может не быть предела?
Например, она может болтаться и никогда не стремиться ни к какой точке. Самая простая "болталка"– это последовательность $x_n = (-1)^n$.
По чётным номерам она равна 1, по нечётным -1. Таким образом, ни 1, ни -1 не могут являться её пределами, поскольку (вспоминаем определение), и у той и у другой точки существует маленькая (достаточно взять радиус окрестности меньше 0.5) окрестность, за пределами которой находится бесконечно много членов последовательности x_n. А именно - за пределами маленькой окрестности 1 будут находиться все члены с нечётными номерами; за пределами маленькой окрестности числа -1 - с чётными.

Контрольный вопрос: мы только что показали, что 1 и -1 не являются достойными кандидатами на предел последовательности x_n. Но почему все остальные кандидаты $a \in \mathbb{R}$ тоже не подходят?

Ответ: Любое число $a \neq \pm 1$ уж точно не годится в качестве кандидата на предел нашей последовательности $x_n = (-1)^n$, поскольку, если взять окрестность $U_\varepsilon(a)$, где $\varepsilon < min\{|a-1|, |a+1|\}$, то в эту окрестность $U_\varepsilon(a)$ не попадёт вообще ни одного члена последовательности x_n. Значит, ни о какой сходимости к $a \neq \pm 1$ не может идти и речи.

Похожим же образом можно сконструировать огромное множество похожих примеров расходящихся последовательностей.

А мы давайте теперь обсудим

3 Свойства сходящихся последовательностей.

Предложение 1. Любая сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство: Доказательство проводится в 2 этапа:
1. Ограничим сначала бесконечный "хвост" последовательности x_n. А именно, раз уж нам дано, что x_n сходится к A, то какую бы маленькую окрестность этого A мы ни взяли ($\forall\varepsilon > 0$), "за бортом" этой окрестности окажется лишь конечное множество членов x_n ($\exists N\ : \forall n > N\ |x_n - A| < \varepsilon$). Сколь угодно маленькая нам здесь даже не нужна. Возьмем просто хоть какую-нибудь окрестность A. Допустим, окрестность радиуса 1 (то есть $\varepsilon = 1$). Тогда, по определению того, что $x_n \to A$, $\exists N\ : \forall n > N\ |x_n - A| < 1$. То есть рано или поздно, на мы заползём в единичную окрестность числа A. Значит, начиная с этого самого N мы нашу окрестность тупо ограничиваем сверху - правым краем этой окрестности, снизу - левым краем. То есть, $\forall n > N$ выполнено $A - 1 < x_n < A + 1$. А что делать с начальным куском последовательности, то есть с теми её членами, номера которых меньше или равны N?
2. Начальный кусок на то и начальный, что в нём в любом случае содержится только конечное множество членов последовательности, а именно: $x_1, x_2, ...x_N$. Ясное дело, что среди них есть максимум и минимум:

$$\alpha = max\{x_1, x_2, ...x_N\}$$

$$\beta = min\{x_1, x_2, ...x_N\}$$

Вот эти самые α и β наш начальный кусок и ограничат.
Но мы-то хотели, вообще-то, ограничить всю последовательность, как говорят, равномерно. То есть не по отдельности начало её и бесконечный хвост. Мы хотели найти такие константы C_1, C_2, что $\forall n \in \mathbb{N} : C_1 < x_n < C_2$. Как это сделать? По сути, пункты 1 и 2 дают нам такую вот систему неравенств:

$$\begin{cases} A - 1 < x_n < A + 1 & \text{при } n > N \\ \beta \leqslant x_n \leqslant \alpha & \text{при } n \leqslant N \end{cases}$$

Как же нам ограничить всю x_n?. Ясное дело, взяв просто максимум из двух верхних и минимум из двух нижних границ, мы получим, что $\forall n \in N$ будет выполнено, что

$$min\{\beta, A - 1\} \leqslant x_n \leqslant max\{\alpha, A + 1\}$$

Контрпример: А верно ли обратное? Т.е. что любая ограниченная последовательность сходится?

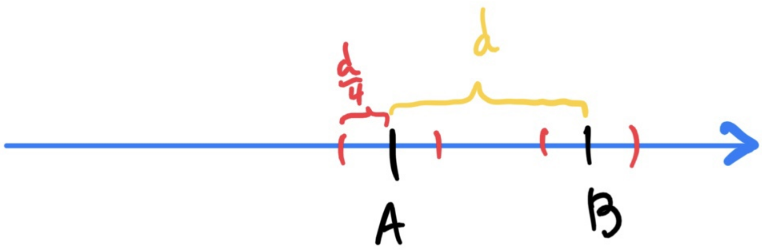
Ответ: Разумеется, это неверно. Последовательность, которая у нас только недавно фигурировала в качестве классического примера расходящейся: $x_n = (-1)^n$ - ограничена, но никуда не сходится.

<u>**Предложение 2.**</u> Последовательность x_n сходится к 0 тогда и только тогда, когда $|x_n|$ сходится к 0, то есть она сходится к 0 по модулю.

Доказательство: Это очевидно следует из определения. Просто запишите, что значит $x_n \to 0$ и $|x_n| \to 0$ по определению и убедитесь, что это *буквально* одно и то же.

<u>**Предложение 3.**</u> Если последовательность x_n сходится к числу A, то этот предел A у неё единственный.
Можно строго сформулировать это утверждение так:
Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$, то обязательно $A = B$.

Доказательство: Будем доказывать это утверждение от противного.
Пусть, наоборот, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$, но при этом $A \neq B$.
Поскольку $A \neq B$, то их можно отделить непересекающимися окрестностями. А именно, пусть $d = |A - B|$ - расстояние между числами A и B. Ясно, что $d > 0$, именно из-за того, что A и B - различные числа.
Тогда понятно, что если мы их окружим, например, окрестностями радиуса $\frac{d}{4}$, то эти окрестности не будут пересекаться:



Далее, по определению предела, из того факта, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, найдём такое N_A, что при всех $n > N_A$ будет выполнено $|x_n - A| < \frac{d}{4}$, то есть x_n содержится в окрестности радиуса $\frac{d}{4}$ числа A.
Аналогично, по определению предела, из того факта, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$, найдём такое N_B, что при всех $n > N_B$ будет выполнено $|x_n - B| < \frac{d}{4}$, то есть x_n содержится в окрестности радиуса $\frac{d}{4}$ числа B.
Тогда, взяв $N = max\{N_A, N_B\}$, получим, что все члены последовательности x_n с номерами $n > N$ должны попадать в обе окрестности (окрестность радиуса $\frac{d}{4}$ числа A и окрестность радиуса $\frac{d}{4}$

числа B). Однако эти окрестности, очевидно, не пересекаются. Следовательно, никакие члены последовательности не могут лежать в них одновременно. Мы получили противоречие, которое и доказывает, что двух различных пределов у последовательности быть не может.

Замечание: На самом деле, мы неявно постоянно пользуемся тем фактом, что предел единственный. А именно, мы делаем это во всех задачах, где мы считаем предел. Давайте немного проанализируем.
Обычно мы просто каким-то способом вычисляем предел, и на этом заканчиваем решение примера, говоря, что вот он, мол, ответ. Но раз мы, найдя один ответ, успокаиваемся и не ищем другой, второй ответ, это и означает, что мы верим, что предел последовательности может быть только один, второй мы уже не ищем.

Предложение 4. Предел суммы последовательностей равен сумме пределов, при условии что эти пределы слагаемых существуют. А именно, докажите следующее:

Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = A + B$

`На всякий случай, давайте проговорим, что под суммой двух последовательностей` x_n `и` y_n `мы понимаем т.н. "почленную" сумму. То есть, мы должны просто при каждом` n `сложить соответствующие члены последовательностей` x_n `и` y_n`.`
`Например, если` $x_n = \sin(134n + 10)$`, а` $y_n = n^2 + \frac{10n}{3}$`, то` $(x + y)_n = \sin(134n + 10) + n^2 + \frac{10n}{3}$`.`
`К примеру,` $(x + y)_{10} = \sin(134 \cdot 10 + 10) + 10^2 + \frac{10\cdot 10}{3}$.

Доказательство: Для начала, обсудим одну вспомогательную лемму, которая нам понадобится как в решении этой задачи, так и много где ещё в дальнейшем. Так что рекомендуется её продумать и запомнить. Лемма эта называется "неравенство треугольника" (подумайте, почему?).
Лемма. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ выполнено, что $|a + b| \leqslant |a| + |b|$

Доказательство леммы. Тут достаточно просто рассмотреть случаи в зависимости от знаков a и b.

1. Если a и b оба положительны или оба отрицательны, то есть, короче говоря, одного знака, то это неравенство просто обращается в равенство. Модули снимаются везде одинаково, и поэтому модуль от суммы будет просто равен самой сумме, либо минус сумме. В правой же части будет стоять то же самое, если раскрыть модуль.

2. Если же a и b разных знаков, то в левой части неравенства одно из них "отъест" часть другого, и поэтому она будет строго меньше, чем сумма модулей, потому что модули у них берутся по отдельности и в уничтожат один из минусов, который есть либо у a, либо у b.

Перейдём теперь к решению самой задачи. Итак, нам дано, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ и то, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$. Для последовательности x_n это означает, что какое бы $\varepsilon > 0$ нам ни дали, мы всегда по нему можем найти такой момент N_1, что начиная с него, то есть $\forall n > N_1$ вся наша последовательность x_n попадает в ε-окрестность числа A. То есть, начиная с этого N_1 будет выполняться неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$.

Аналогичным образом, мы по любому $\varepsilon > 0$ можем строить какое-то своё N_2, начиная с которого последовательность y_n попадёт в ε-окрестность числа B. То есть, начиная с которого будет выполнено $|y_n - B| < \varepsilon$. Получаем, таким образом, такую вот систему неравенств:

$$\begin{cases} |x_n - A| < \varepsilon & \text{при } n > N_1(\varepsilon) \\ |y_n - B| < \varepsilon & \text{при } n > N_2(\varepsilon) \end{cases}$$

где N_1 и N_2 строятся по ε, что и отражено в записи $N_1(\varepsilon)$ и $N_2(\varepsilon)$.

Ну и что нам теперь с этой системой делать? Вспомним, что мы вообще хотим доказать. Мы хотим доказать, что $x_n + y_n \to A + B$. То есть, мы хотим по любому $\varepsilon > 0$ уметь строить такое N, что при всех $n > N$ будет выполняться, что $|x_n + y_n - (A + B)| < \varepsilon$. На самом деле, у нас для этого уже всё готово.

Итак, пусть нам дали какое-то $\varepsilon_0 > 0$. Мы сначала построим по нему $N_1(\varepsilon_0)$ и $N_2(\varepsilon_0)$, начиная с которых x_n и y_n соответственно попадают в ε_0-окрестности своего предела (как в системе неравенств выше). Далее, возьмём такое N, чтобы оба неравенства в нашей системе были выполнены одновременно. Подойдёт, самое простое, $N = max\{N_1, N_2\}$. Таким образом, при всех $n > N$ будут выполнены оба неравенства системы, то есть, одновременно и x_1 будет в ε_0-окрестности числа A, и y_1 будет в ε_0-окрестности числа B.

А теперь, оценим то что мы на самом деле хотели сделать меньше этого ε_0. Итак, при $n > N$ будет выполнено:

$$|x_n + y_n - (A + B)| = |(x_n - A) + (y_n - B)| \leqslant |x_n - A| + |y_n - B| < \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0$$

(именно здесь, внимание, мы и воспользовались неравенством треугольника в самом первом неравенстве! а второй переход объясняется просто тем, что оба условия нашей системы при $n > N$ выполнены)

Получается, мы умеем делать модуль разности $|x_n + y_n - (A + B)|$ меньше чем $2\varepsilon_0$. Но ε_0 было вообще любым сколь угодно маленьким числом. Так что $2\varepsilon_0$ тоже можно сделать сколь угодно малым. Можно просто обозначить его за ε_1 и сказать, что мы умеем делать модуль разности $|x_n + y_n - (A + B)|$ меньше любого наперёд заданного ε_1 начиная с какого-то номера N (алгоритм его построения мы описали выше).

Вот мы и доказали по определению, что $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n + y_n) = A + B$.

<u>**Предложение 5.**</u> Сформулируем и докажем так называемое свойство "сохранения знака" сходящейся последовательности. А именно: пусть известно, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$ и $A \neq 0$. Тогда:

1. Если $A > 0$, то $\exists N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$ последовательность x_n имеет тот же знак, что и A, т.е. в данном случае $x_n > 0$.

2. Если $A < 0$, то $\exists\, N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$ последовательность $x_n < 0$.

Доказательство: Поскольку два пункта нашего предложения двойственны друг другу, докажем только один из них (другой доказывается абсолютно аналогично).

Итак, докажем пункт 1. Т.е. пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ и $A > 0$. Но раз $x_n \to A$, то для любого $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ такое, что все члены последовательности x_n с номерами большими, чем N (т.е. при $n > N$) попадают в $U_\varepsilon(A)$.

Теперь давайте просто возьмём $\varepsilon < |A|$, т.е. выберем ε меньшим, чем расстояние от A до нуля.
Таким образом, все члены нашей последовательности x_n, начиная с номера $N = N(\varepsilon)$ попадут в ε-окрестность числа A. Но поскольку по построению эта окрестность отделена от 0, то есть находится по одну сторону от нуля, то все члены нашей последовательности будут иметь (начиная с номера N) тот же знак, что и A. Что и требовалось доказать.

Предложение 6. Вот ещё одно вспомогательное, но важное для дальнейшего свойство предельного перехода. А именно:

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ (такие последовательности, напомним, мы будем называть бесконечно малыми). Пусть x_n - какая-то ограниченная последовательность (т.е. $\exists\, c > 0$ такая, что $\forall n \in \mathbb{N}$: $|x_n| < c$). Тогда $\alpha_n \cdot x_n$ - тоже стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \cdot x_n = 0$.

Доказательство: Всё, что нам нужно доказать - это что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что как только $n > N$, то обязательно $|\alpha_n \cdot x_n| < \varepsilon$.
При этом, мы знаем, что α_n - бесконечно малая, то есть для неё самой выполнено, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что как только $n > N$, то обязательно $|\alpha_n| < \varepsilon$.
Итак, давайте сначала поймём, какой константой у нас ограничена x_n. Пускай это будет число $c > 0$, т.е. $\forall n \in \mathbb{N}$ будет $|x_n| < c$.

Далее, пусть нам дали любое $\varepsilon_0 > 0$. Построим по нему такое $N(\varepsilon_0)$ (из определения того, что α_n сходится к нулю), что при всех $n > N(\varepsilon_0)$ будет $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon_0}{c}$.

И этого, на самом деле, нам уже достаточно. Смотрите, теперь, поскольку для всех n мы ограничили x_n константой c, то это означает, что, начиная с $N(\varepsilon_0)$ произведение $|\alpha_n \cdot x_n|$ меньше, чем ε_0, т.к. первый сомножитель меньше $\frac{\varepsilon_0}{c}$ (мы так выбрали $N(\varepsilon_0)$ выше), а второй меньше c. Значит произведение просто-напросто меньше ε_0 и мы всё доказали.

Предложение 7. Сформулируем и докажем важное и полезное нам свойство бесконечно малых последовательностей:

Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, пусть также $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. (т.е. последовательности α_n и β_n-бесконечно малые) Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \cdot \beta_n = 0$. То есть, иными словами, их произведение - тоже бесконечно малая последовательность.

Доказательство: Воспользуемся предыдущим **Предложением 6** и тем фактом, что сходящаяся последовательность обязательно ограничена.
У нас тут по условию целых две сходящихся последовательности: α_n и β_n - можно выбрать любую. Выберем, например, α_n. Раз она сходится к нулю по условию, то она является ограниченной. То есть $\exists c > 0$ такая, что $\forall n \in \mathbb{N}$ будет $|\alpha_n| < c$.
Что можно тогда сказать про произведение $\alpha_n \cdot \beta_n$? Ясно, что раз $\forall n \in \mathbb{N}$ будет $|\alpha_n| < c$, то при всех n можно модуль произведения ограничить сверху $|\alpha_n \cdot \beta_n| < c \cdot |\beta_n|$. Ну а снизу модуль всегда ограничен нулём. Таким образом, мы имеем, что:

$$0 \leqslant |\alpha_n \cdot \beta_n| < |\beta_n \cdot c|$$

Далее, поскольку $\beta_n \to 0$, то и $\beta_n \cdot c$ тоже должна стремиться к 0 (потому что это произведение бесконечно малой последовательности на константу, то есть на заведомо ограниченную последовательность, а значит, она стремится к 0). Таким образом, наше произведение $|\alpha_n \cdot \beta_n|$ снизу по тривиальным причинам ограничено нулём, а сверху зажато последовательностью $|\beta_n| \cdot c$, которая, как мы показали, стремится к 0. Значит, и нашей последовательности $|\alpha_n \cdot \beta_n|$ некуда деваться - она тоже обязана стремиться к 0.

Предложение 8. Предел произведения последовательностей равен произведению пределов, при условии, что эти пределы сомножителей существуют. То есть:

Доказать, что если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ и если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = A \cdot B$

Доказательство: Доказывать подобные свойства последовательностей удобно, сводя всё к свойствам бесконечно малых последовательностей. Так и сделаем. А именно, раз $x_n \to A$, то, понятное дело, (проверьте сами по определению) последовательность $\alpha_n = x_n - A$ обязана оказаться бесконечно малой (мы просто вычли из нашей последовательности x_n её предел A). То есть, $\alpha_n = x_n - A \to 0$.
По аналогичным соображения мы можем сказать, что и $\beta_n = y_n - B \to 0$. Теперь мы имеем дело с двумя бесконечно малыми последовательностями α_n и β_n. Значит, мы можем написать, что $x_n = \alpha_n + A$, и $y_n = \beta_n + B$. (Мы так и определили, фактически, эти α_n и β_n)

Далее, просто перемножим x_n и y_n и раскроем скобки:

$$x_n \cdot y_n = (\alpha_n + A)(\beta_n + B) = \alpha_n\beta_n + \alpha_n B + A\beta_n + AB$$

И что же мы видим? Первое слагаемое - это произведение бесконечно малых $\alpha_n\beta_n$. Но произведение бесконечно малых само бесконечно мало. Второе и третье слагаемое - это произведение соответствующей бесконечно малой на константу. Они тоже будут бесконечно малыми. Ну а четвертое слагаемое - это просто произведение пределов AB последовательностей x_n и y_n. Таким образом, обозначив за $\gamma_n = \alpha_n\beta_n + \alpha_n B + A\beta_n \to 0$, мы получаем, что наше произведение $x_n y_n$ представляется в виде $x_n y_n = \gamma_n + AB$, где γ_n-бесконечно малая. значит, $x_n y_n$ обязано стремиться к AB.

Предложение 9. С пределом дроби работает аналогичное свойство (единственное, нужно внимательно следить, что мы нигде не делим на ноль). Итак, докажем, что:

Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, и $B \neq 0$ и, кроме того, т.к. на последовательность y_n мы вообще-то хотим делить, то есть должно быть выполнено, что $\forall n \in \mathbb{N}\ y_n \neq 0$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$.

Доказательство: Докажем, для начала, одну вспомогательную лемму.
Лемма. Если $y_n \to B$ и $B \neq 0$, то $\frac{1}{y_n}$ - ограничена.
Доказательство. Действительно, поскольку $y_n \to B$, а $B \neq 0$, то, просто по определению предела, начиная с какого-то момента мы будем попадать в любую ε-окрестность числа B. Но нам надо отступить от нуля, чтобы не получилось случайно, что знаменатели у $\frac{1}{y_n}$ слишком маленькие, то есть сами дроби $\frac{1}{y_n}$ - слишком большие. Поэтому пусть $\Delta = |B|$ - расстояние от точки B до нуля. Возьмём теперь в качестве ε число $\frac{\Delta}{2}$. Тогда (по определению того, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$) $\quad \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N\ |y_n - B| < \frac{\Delta}{2}$, или, переписывая это последнее неравенство:

$$B - \frac{\Delta}{2} < y_n < B + \frac{\Delta}{2} \text{ при всех } n > N.$$

Но мы тем самым отделили y_n от нуля (так как числа $B - \frac{\Delta}{2}$ и $B + \frac{\Delta}{2}$ очевидно одного знака, то есть находятся по одну сторону от 0. Если сомневаетесь, вспомните, что Δ у нас и обозначало $|B|$, то есть расстояние от B до нуля). Осталось только взять и перевернуть все члены неравенства (от этого и все знаки в неравенстве поменяются), и получить, что

$$\frac{1}{B + \frac{\Delta}{2}} < \frac{1}{y_n} < \frac{1}{B - \frac{\Delta}{2}} \text{ при всех } n > N.$$

Вот мы и ограничили последовательность $\frac{1}{y_n}$. Лемма доказана.

Перейдём теперь к основному утверждению задачи. Докажем, сначала, что $\frac{1}{y_n}$ будет стремиться к $\frac{1}{B}$.
Действительно, для этого достаточно установить, что $\frac{1}{y_n} - \frac{1}{B}$ - бесконечно малая. Или, приводя к одному знаменателю, что $\frac{B-y_n}{y_n B}$ - бесконечно малая. Но наша дробь представляется попросту в виде произведения:

$$\frac{1}{y_n} - \frac{1}{B} = \frac{B - y_n}{y_n B} = (B - y_n) \cdot \frac{1}{y_n B}$$

Первый член произведения - бесконечно малая (т.к. нам дано, что y_n стремится к B). Второй член произведения, то есть $\frac{1}{y_n B}$ - ограничен по лемме, которую мы только что доказали. Значит, мы имеем произведение бесконечно малой на ограниченную. Значит, это произведение тоже бесконечно мало. Значит, $\frac{1}{y_n}$ действительно стремится к $\frac{1}{B}$.

А значит, если мы возьмём $\frac{x_n}{y_n}$, то эту дробь можно рассмотреть как произведение $x_n \cdot \frac{1}{y_n}$. Первый сомножитель здесь по тому, что нам дано, стремится к A, а второй, по тому, что мы только что доказали, стремится к $\frac{1}{B}$. Значит, всё наше выражение $\frac{x_n}{y_n}$ стремится к $\frac{A}{B}$.

4 Подпоследовательности.

Опр. Пусть x_n - любая последовательность. Подпоследовательностью x_n называется такая *последовательность* $\xi_k = x_{n_k}$, получаемая из членов последовательности x_n удалением каких-то членов, при этом, что важно, **без изменения порядка следования членов последовательности x_n одного за другим!**

Пример 1. Пусть $x_n = n$. У этой последовательности можно выделить подпоследовательность $\xi_n = x_{2n}$ чётных чисел.

Пример 2. Аналогично, у последовательности $x_n = n$ можно выделить подпоследовательность $\chi_n = x_{2n-1}$ чётных чисел.

Пример 3. Рассмотрим последовательность $x_n = (-1)^n$. У неё можно выделить, например, две такие подпоследовательности: $m_n = x_{2n-1}$ и $p_n = x_{2n}$. Первая из них идёт по нечётным номерам x_n и, очевидно, всегда равна -1. Вторая, соответственно, идёт по чётным номерам x_n и всегда равна $+1$.

Предложение 1. Если последовательность x_n сходится к A, то и любая её подпоследовательность $\xi_k = x_{n_k}$ тоже сходится к тому же самому числу A.

Доказательство: Нам по условию дано, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall n > N$ будет выполнено $|x_n - A| < \varepsilon$. Но наша подпоследовательность ξ_k получается выкидыванием каких-то членов x_n, **без изменения порядка их следования!**

Таким образом, если для любого $\varepsilon > 0$ все члены последовательности x_n попадают в $U_\varepsilon(A)$, то так же будут попадать в $U_\varepsilon(A)$ и все члены подпоследовательности $\xi_k = x_{n_k}$, поскольку мы берём те же самые члены x_n в том же самом порядке, правда, быть может, избавившись от каких-то членов.

Но избавление от членов последовательности x_n, очевидно, не может выкинуть нас ни из какой ε-окрестности числа A.

5 Примеры на вычисление:

Пример. Вычислить:

a) $x_n = n$

b) $x_n = (1 + \frac{1}{n+2})$

c) $x_n = (-1)^n$

d) $x_n = (-1)^n \cdot n$

e) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$

f) $x_n = (0.9)^n$

g) $x_n = (1.1998)^n$

h) $x_n = \frac{6n+1}{2n-1}$

i) $x_n = \frac{n+1}{n} + 0.9^n$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sin(n!)}{n+1}$

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-4)^n+5^n}{(-4)^{n+1}+5^{n+1}}$

Решение.

a) Этот предел очень похож (и даже немного проще устроен), чем второй пример пункта **a)** из предыдущей задачи. По тем же самым причинам, что и там, такая последовательность сходиться не будет (она "стремится", условно, к $+\infty$)

b) А это уже похоже на примеры из пункта **c)** предыдущей задачи. Здесь мы добавили 1 к последовательности $\frac{1}{n+2}$, которая, понятное дело, стремится к 0 (это почти что $\frac{1}{n}$, только начинающаяся с $\frac{1}{3}$). Значит, наша последовательность, как сумма 1 и стремящейся к 0, имеет предел, равный 1. То есть, можно записать: $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n+2}) = 1$

c) Это самый первый пример из пункта **a)** предыдущей задачи. Эта последовательность не имеет предела.

d) Это слегка модифицированный первый пример из пункта **a)** предыдущей задачи. Только тут мы домножили нашу "болталку" на n. От этого она, разумеется, не начнёт никуда сходиться. Наоборот, давайте посмотрим на первые несколько членов нашей последовательности:

$$x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = -3, x_4 = 4, x_5 = -5, ...$$

То есть, мы теперь не просто при каждом следующем шаге переходим от положительного числа к отрицательному, но ещё и увеличиваем размах. Каждый следующей член последовательности меняет знак с предыдущего, и увеличивается по модулю на 1. Но даже когда мы просто болтались между 1 и -1, никакого предела у неё не было. А теперь - тем более.

e) А здесь наоборот, мы стали нашу "болталку" делить на n. Это уже более интересный случай.

Проследите за первыми несколькими членами этой последовательности:

$$x_1 = \frac{-1}{1}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{-1}{3}, x_4 = \frac{1}{4}, x_5 = \frac{-1}{5}, x_6 = \frac{1}{6}, ...$$

Ничего не напоминает? Правильно, это наша давно известная последовательность $\frac{1}{n}$, про которую мы в пункте **b)** предыдущей задачи доказали, что она стремится к 0. Но теперь у нас члены этой последовательности с чётными номерами идут с плюсом, а с нечётными - с минусом. То есть мы будем точно так же стремиться к 0, то теперь на каждом шаге мы будем подходить к нему всё ближе и ближе, но с разных сторон - то слева от нуля, то справа.
Таким образом, можно записать: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$
f) Опять же, чтобы интуитивно "прочувствовать", к чему такая последовательность должна стремиться, можно вычислить несколько её первых членов:

$$x_1 = 0.9, x_2 = 0.81, x_3 = 0.729, x_4 = 0.6561, x_5 = 0.59049, x_6 = 0.531441, ...$$

Члены этой последовательности, как мы видим, подозрительно уменьшаются. Можно настойчиво посчитать еще несколько членов и убедиться, что они рано или поздно станут и меньше 0.5, и меньше 0.4. Таким образом, у нас рождается гипотеза, что наша x_n должна стремиться к 0. Эта гипотеза верная, попробуем её доказать.
Для этого нужно по любому $\varepsilon > 0$ научиться строить N, такой что $|(0.9)^n| < \varepsilon$ при всех $n > N$. Применяем наш уже старый трюк: надо найти такое N, что $\left|(0.9)^N\right| < \varepsilon$. Но это неравенство эквивалентно тому, что: (снимаем модуль и берём логарифм по основанию 0.9 от обеих частей, не забывая, что т.к. основание логарифма меньше 1, он поменяет знак неравенства) $N > \log_{0.9}\varepsilon$. Таким образом, когда нам дадут какой-то $\varepsilon_0 > 0$, то мы просто посчитаем логарифм от него $log_{0.9}\varepsilon_0$ и возьмём какое-нибудь натуральное число N такое, что $N > \log_{0.9}\varepsilon_0$. Это гарантирует нам, что $\left|(0.9)^N\right| < \varepsilon_0$. И тогда уж тем более для всех $n > N$ будет выполнено $|(0.9)^n| < \varepsilon_0$, потому что наша последовательность становится всё меньше и меньше с ростом n. Таким образом, мы умеем по любому ε находить тот момент, начиная с которого вся последовательность $x_n = (0.9)^n$ попадает в ε-окрестность нуля. Мы доказали, тем самым, что $\lim\limits_{n\to\infty}(0.9)^n = 0$.
g) Посчитайте сами несколько первых членов последовательности. В отличие от предыдущего пункта, они наоборот будут увеличиваться - вначале медленно, а затем всё быстрее и быстрее. На самом деле, здесь штука в том, что, поскольку в степень n мы возводим всякий раз числа большие 1, то такая последовательность будет неограниченно расти.
То есть, можно сказать, что члены этой последовательности будут сколь угодно большими с ростом n, то есть $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists n \in N$ такой, что $x_n > A$ (а именно, это n ищется как $log_{1.1998}A$).
Ни о каком пределе не может быть и речи. (Или, неформально говоря, наша $x_n \to +\infty$).
h) Желающие могут вновь поподставлять какие-то маленькие значения n и, посмотрев на первые члены последовательности, предположить гипотезу, к чему x_n сходится и сходится ли вообще. Мы же сделаем проще:
Ясно, что $x_n = \frac{6n+1}{2n-1} = \frac{3(2n-1)+4}{2n-1} = 3 + \frac{4}{2n-1}$. Таким образом, наша последовательность x_n представляется в виде $3 + y_n$, где $y_n = \frac{4}{2n-1}$. Легко убедиться, что $y_n \to 0$, значит, $x_n \to 3$.

i) Ясно, что $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ и $\{0.9^n\}$ равны 1 и 0 соответственно (второе слагаемое - очевидно; первое слагаемое - если поделить и числитель и знаменатель на n, то очевидно), откуда по **предложению 3** предел суммы этих последовательностей будет равен $1+0=1$.

j) Здесь нам пригодится такая наука, как формула бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + ... + b^n$$

Давайте воспользуемся ей для $a=1, b=1$. Тогда получим:

$$(1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \ldots > 1 + n + \frac{n^2-n}{2} = 1 + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}$$

Таким образом, знаменатели дробей в нашей последовательности ограничены снизу: $2^n > 1 + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}$.

А, значит, сами дроби ограничены сверху: $\frac{n}{2^n} < \frac{n}{1+\frac{n}{2}+\frac{n^2}{2}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}} \to 0$

k) Первое, что мы заметим - это то, что $\forall n \in N$ последовательность $\sin(n!)$ ограничена по модулю 1, то есть $\forall n \in \mathbb{N}$ $|\sin(n!)| \leqslant 1$.

Далее, представим нашу последовательность в виде $\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \cdot \sin(n!)$. Исследуем отдельно первый сомножитель $\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}$. Вновь поделим на самую большую степень, с которой n входит во всю дробь. В данном случае делить мы будем на n^1, то есть на n в первой степени. Итак, $\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}$. У этой дроби, очевидно, числитель стремится к 0, а знаменатель - к 1. Значит, по свойству, что предел отношения равен отношению пределов , вся дробь стремится к 0. А значит, $\frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sin(n!)}{n+1} = \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \cdot \sin(n!) \to 0$, как произведение бесконечно малой на ограниченную.

l) И вновь интуиция должна подсказать нам поделить и числитель и знаменатель на максимальную - но теперь уже не степень n, а выражение с максимальным основанием степени, то есть поделить числитель и знаменатель на 5^n. Что же из этого получится?

$$\frac{(-4)^n + 5^n}{(-4)^{n+1} + 5^{n+1}} = \frac{(-\frac{4}{5})^n + 1}{(-4)(-\frac{4}{5})^n + 5}$$

В числителе мы имеем сумму $(-\frac{4}{5})^n + 1$, где первое слагаемое - бесконечно малая (аналогичный пример с $(\frac{2}{7})^n$ мы уже разбирали), значит, числитель здесь стремится к 1. Знаменатель, по аналогичным соображениям, это произведение бесконечно малой $(-\frac{4}{5})^n$ на (-4) - всё равно бесконечно малая, плюс 5. Значит, знаменатель стремится к 5. Значит, по вся дробь стремится к отношению пределов числителя и знаменателя, то есть к $\frac{1}{5}$. Итого, мы получили, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-4)^n+5^n}{(-4)^{n+1}+5^{n+1}} = \frac{1}{5}$.

6 Примеры на вычисление, с учётом пройденных теорем о пределе суммы, произведения, частного:

Вычислить:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4]{625n^4+10n-13}-5n$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(4-\frac{2}{3^n}\right)\cdot\left(\frac{10n+16}{15n+3}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n^{10}+158n^7+444n^3+n^2+10000)^6}{(4n^4+4n^3+34n+43)^{15}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{10^n+n^8+16}{8^n+\sin(3n)+4n^{10}+11}\right)\cdot\left(11+\frac{5}{n^2}\right)$

Решение.

a) Давайте немного преобразуем наше выражение $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, стоящее под знаком предела. А именно:

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$

$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Откуда уже нетрудно понять, что знаменатель будет стремиться к $+\infty$, а значит вся дробь будет стремиться к 0. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}=0$.

b) Здесь потребуется сделать то же самое, что и в предыдущем пункте **a)**, но только дважды: сначала домножим и поделим на сопряженное к корню четвертой степени: $\sqrt[4]{625n^4+10n-13}-5n = \frac{(\sqrt[4]{625n^4+10n-13}-5n)(\sqrt[4]{625n^4+10n-13}+5n)}{\sqrt[4]{625n^4+10n-13}+5n} = \frac{\sqrt[2]{625n^4+10n-13}-25n^2}{\sqrt[4]{625n^4+10n-13}+5n}$. А затем, домножим уже числитель и знаменатель на сопряженное к корню второй степени:

$\frac{\sqrt[2]{625n^4+10n-13}-25n^2}{\sqrt[4]{625n^4+10n-13}+5n} = \frac{(\sqrt[2]{625n^4+10n-13}-25n^2)(\sqrt[2]{625n^4+10n-13}+25n^2)}{(\sqrt[4]{625n^4+10n-13}+5n)(\sqrt[2]{625n^4+10n-13}+25n^2)} = \frac{625n^4+10n-13-625n^4}{(\sqrt[4]{625n^4+10n-13}+5n)(\sqrt[2]{625n^4+10n-13}+25n^2)}$.

У последней дроби в числителе сокращается четвёртая степень: $\frac{625n^4+10n-13-625n^4}{(\sqrt[4]{625n^4+10n-13}+5n)(\sqrt[2]{625n^4+10n-13}+25n^2)} = \frac{10n-13}{(\sqrt[4]{625n^4+10n-13}+5n)(\sqrt[2]{625n^4+10n-13}+25n^2)}$. Далее, осталось поделить и числитель и знаменатель на n и увидеть, что такая дробь будет стремиться к 0: $\frac{10n-13}{(\sqrt[4]{625n^4+10n-13}+5n)(\sqrt[2]{625n^4+10n-13}+25n^2)} =$

$= \frac{10-\frac{13}{n}}{\left(\sqrt[4]{625+\frac{10}{n^3}-\frac{13}{n^4}}+5\right)\left(\sqrt[2]{625n^2+\frac{10}{n}-\frac{13}{n^2}}+25n\right)}$.

Видно, что числитель стремится к 10, а в знаменателе первая скобка стремится к 10, а вторая - к плюс бесконечности. Значит, знаменатель у нас неограниченно возрастает. Следовательно, дроби стремятся к 0.

c) Легко видеть, что первый сомножитель стремится к 4: $\left(4-\frac{2}{3^n}\right)\to 4-0=4$.

А второй сомножитель стремится к $\frac{2}{3}$: $\frac{10n+16}{15n+3} = \frac{10+\frac{16}{n}}{15+\frac{3}{n}} \to \frac{10}{15}=\frac{2}{3}$.

Таким образом, из-за того, что предел произведения равен произведению пределов, мы имеем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(4-\frac{2}{3^n}\right)\cdot\left(\frac{10n+16}{15n+3}\right) = 4\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$.

d) Мы уже научены опытом, что в таких случаях всё будет решать то, какие коэффициенты стоят при старших членах в числителе и в знаменателе.

После раскрытия скобок в числителе старший член будет 2^6n^{60}, а в знаменателе старший член, тоже после раскрытия скобок, будет $4^{15}n^{60}$. Значит, после того как мы поделим и числитель и знаменатель всей дроби на n^{60}, окажется, что предел её равен $\frac{2^6}{4^{15}}=\frac{2^6}{2^{30}}=\frac{1}{2^{24}}$.

e) Давайте здесь разделим и числитель и знаменатель дроби первого сомножителя на 10^n.

Тогда числитель превращается в $1+\frac{n^8}{10^n}+\frac{16}{10^n}$. Видно, что он стремится к 1 (Потому что мы имеем сумму 1 и двух бесконечно малых. Обращаем внимание, что $\frac{n^8}{10^n}$ стремится к 0, т.к. показательная функция растёт быстрее степенной - это мы обоснуем строго немного позже).

В свою очередь в знаменателе будут одни сплошные бесконечно малые. Он будет равен $\frac{8^n}{10^n}+\frac{\sin(3n)}{10^n}+\frac{4n^{10}}{10^n}+\frac{11}{10^n}$. Первое слагаемое $\frac{8^n}{10^n}=\left(\frac{8}{10}\right)^n$ стремится к 0 по предыдущему пункту **e)**. Остальные - по более очевидным причинам. Таким образом, в числителе у нас в пределе будет

1, а знаменатель стремится к 0. Значит, наша дробь "стремится" к ∞, то есть никакого предела у неё нет.

Эта дробь умножалась на $(11 + \frac{5}{n^2})$, которая стремится к 5. Но если мы умножаем что-то, что "стремится" к ∞ на что-то, стремящееся к 5, то у произведения, конечно, никакого предела быть не может. Значит, в этом пункте ответ такой: последовательность $(\frac{10^n+n^8+16}{8^n+\sin(3n)+4n^{10}+11}) \cdot (11 + \frac{5}{n^2})$ предела не имеет.