

Кинематика

Основные формулы

Равномерное прямолинейное движение

Перемещение:

$$S_x = v_x t$$

Зависимость координаты от времени:

$$x(t) = x_0 + v_x t$$

Равноускоренное прямолинейное движение

Ускорение тела:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{\text{кx}} - v_{0x}}{\Delta t}$$

Зависимость скорости от времени:

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t$$

Зависимость координаты от времени:

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$$

Перемещение:

$$S_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$$

Перемещение, «формула без времени»:

$$S_x = \frac{v_{\text{кx}}^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$$

Перемещение, «формула без ускорения»:

$$S_x = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_{\text{кx}})t$$



Механическое движение

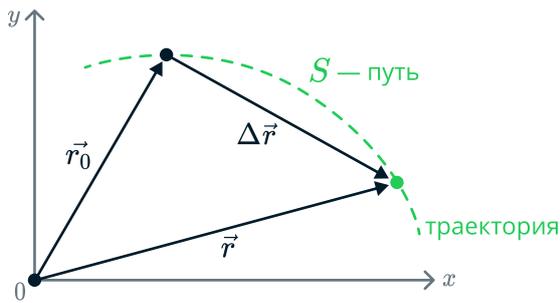
Механическое движение тела — изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени. При механическом движении тела взаимодействуют по законам механики. Кинематика описывает геометрические свойства движения без учета причин, которые его вызывают. Главной задачей кинематики является математическое определение положения и характеристик движения точек или тел во времени.

Материальная точка — это тело, размеры которого очень малы по сравнению с расстоянием, которое оно прошло, поэтому этими размерами можно пренебречь. В кинематике все тела принято рассматривать как материальные точки.

Основные понятия

- **Траектория** — линия, вдоль которой движется тело.
- **Путь** — длина участка траектории, пройденного телом за определенный промежуток времени.
- **Радиус-вектор** — вектор, проведенный из начала координат в место расположения материальной точки. Положение материальной точки в пространстве задается радиус-вектором.
- **Перемещение** — вектор, соединяющий начальное и конечное положение тела.
- **Система отсчета** — тело отсчета (начало координат) вместе с жестко связанной с ним системой координат и часами.

Для лучшего понимания разницы между понятиями пути и перемещения снизу изображен поясняющий рисунок.



\vec{r}_0 — начальное положение

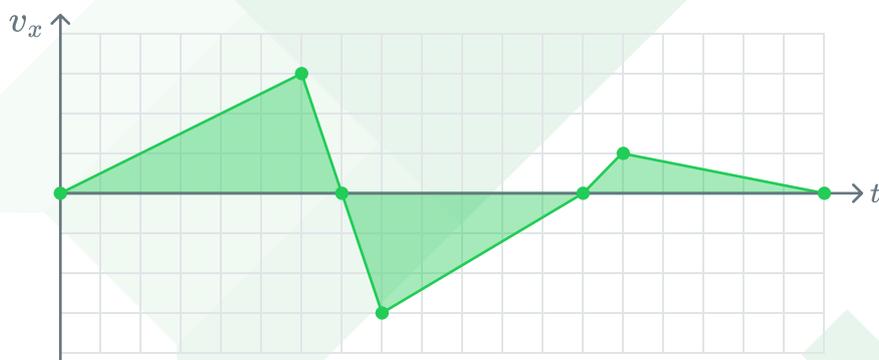
\vec{r} — конечное положение

$\Delta\vec{r}$ — перемещение

Кинематические характеристики движения материальной точки

Перемещение — вектор, соединяющий два последовательных положения материальной точки на траектории. Перемещение является вектором-разностью радиус-векторов конечного и начального положений тела.

Графический метод нахождения перемещения и пройденного пути: для определения проекции перемещения S_x нужно найти численно равную ей площадь под графиком проекции скорости $v_x(t)$.



Скорость — векторная физическая величина, которая характеризует быстроту изменения положения материальной точки в пространстве с течением времени.

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

Единицы измерения:

$[v] = \text{м/с}$ (метр в секунду).



Вектор скорости — это первая производная от радиус-вектора по времени.

Ускорение — векторная физическая величина, которая характеризует быстроту изменения скорости по величине и по направлению.

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_k - \vec{v}_0}{\Delta t}$$

где v_k и v_0 — конечная и начальная скорость соответственно.

В проекции на ось x :

$$a_x = \frac{v_{kx} - v_{0x}}{\Delta t}$$

где v_{kx} и v_{0x} — проекция конечной и начальной скорости на ось x соответственно.

Единицы измерения:

$$[a] = \text{м/с}^2 \text{ (метр в секунду за секунду).}$$

Вектор ускорения — это первая производная от скорости по времени и вторая производная от радиус-вектора по времени.

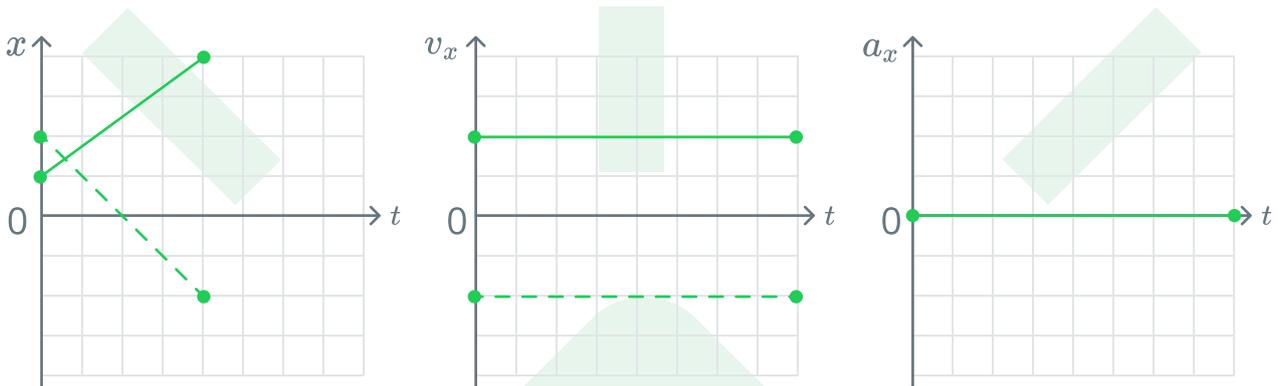
Вектор ускорения сонаправлен с вектором скорости при равноускоренном движении и противоположно направлен при равнозамедленном движении.



Прямолинейное равномерное движение

Прямолинейное равномерное движение (ПРД) — движение, при котором тело за равные промежутки времени совершает одинаковые перемещения.

Траектория ПРД — прямая. При этом скорость остается постоянной $\vec{v} = \text{const}$.



Уравнение движения материальной точки:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$$

Скорость движения материальной точки:

$$\vec{v} = \text{const}$$

Ускорение материальной точки:

$$\vec{a} = \vec{0}$$

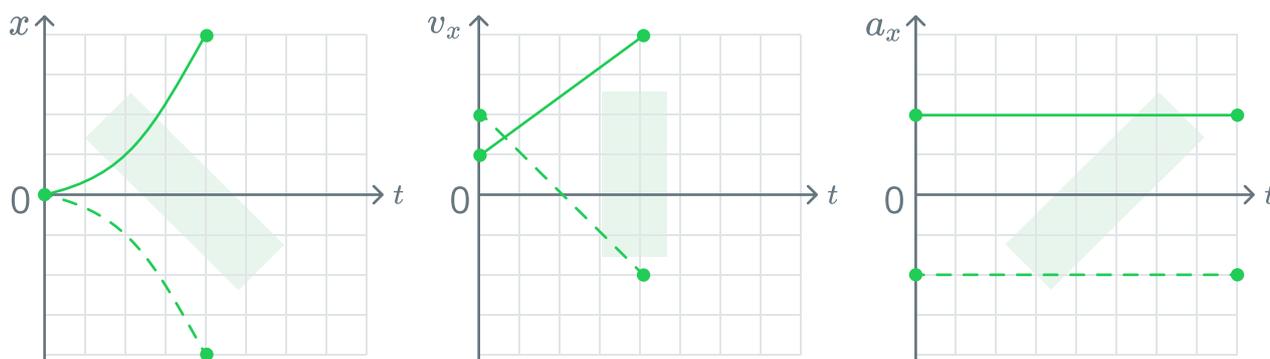
Пройденный путь:

$$S = vt$$



Прямолинейное равноускоренное движение

Прямолинейное равноускоренное движение (ПРУД) материальной точки — движение с постоянным вектором ускорения $\vec{a} = \text{const}$. Траекторией ПРУД является парабола.



Уравнение движения материальной точки:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$$

Скорость движения материальной точки:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} t$$

Ускорение материальной точки:

$$\vec{a} = \text{const}$$

Перемещение:

$$S_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$$

Перемещение, «формула без времени»:

$$2\vec{a}\vec{S} = \vec{v}^2 - \vec{v}_0^2$$

Перемещение, «формула без ускорения»:

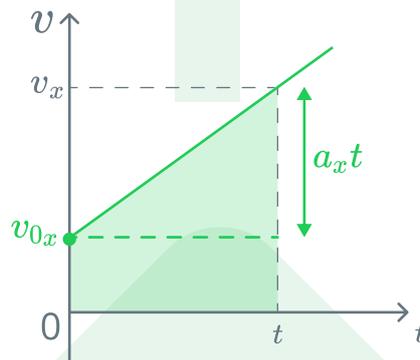
$$\vec{S} = \frac{(\vec{v} + \vec{v}_0)t}{2}$$



Выведем все формулы для перемещения при ПРУД. Для этого вспомним определение ускорения:

$$a_x = \frac{v_{\text{кx}} - v_{0x}}{t} \Rightarrow v_x = v_{0x} + a_x t$$

Данная зависимость является линейной, потому что переменная t имеет первую степень. То есть график будет иметь вид прямой. Сравним с общим видом уравнения прямой $y = b + kx$.



Отрезок от v_{0x} до v_x равен разности этих скоростей: $v_x - v_{0x} = a_x t$. Мы уже знаем, что перемещение при ПРУД можно найти как площадь фигуры под графиком. Разобьем синюю фигуру на две части — прямоугольник со сторонами v_{0x} и t и треугольник с основанием $a_x t$ и высотой t . Теперь найдем площадь каждой фигуры и найдем сумму площадей.

$$S = S_{\text{прямоуг}} + S_{\text{треуг}}$$

Получим формулу для перемещения при ПРУД материальной точки:

$$S = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$$

Теперь посмотрим на синюю фигуру под графиком как на трапецию и найдем ее площадь (полусумма оснований на высоту). Тогда получим «формулу без ускорения»:

$$S = \frac{(v_{0x} + v_x)t}{2}$$



Обе формулы работают и в векторном представлении. Осталась еще одна формула для перемещения при ПРУД. Чтобы ее получить, запишем уравнение для перемещения при, выведенное ранее, в векторном виде:

$$\vec{S} = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2}t$$

Домножим обе части на вектор \vec{a} :

$$\vec{S}\vec{a} = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2}\vec{a}t$$

Представим $\vec{a}t$ как разность векторов конечной и начальной скоростей:

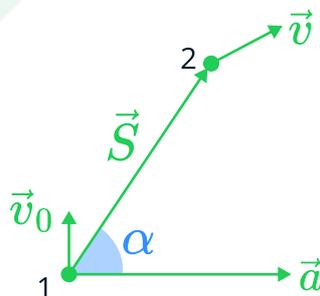
$$\vec{S}\vec{a} = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2}(\vec{v} - \vec{v}_0)$$

Можно заметить, что выражение можно упростить, используя формулу разности квадратов:

$$2\vec{a}\vec{S} = \vec{v}^2 - \vec{v}_0^2$$

Произведение двух векторов $\vec{a} \cdot \vec{S}$ называется скалярным и расписываются как $aS \cos \alpha$, где угол α является углом между вектором ускорения \vec{a} и перемещения \vec{S} . Скалярные произведения $\vec{v} \cdot \vec{v}$ и $\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0$ расписываются как v^2 и v_0^2 соответственно. Тогда:

$$2aS \cos \alpha = v^2 - v_0^2$$



Для одной оси эта формула записывается в проекциях:

$$2a_x S_x = v_x^2 - v_{0x}^2$$